

问题 1

(1): 辐射长度和核作用长度分别是什么, 简单比较经过 1 毫米厚的碳、铝、钨板后电子的能量衰减到原来的多少, 对于 1GeV、10GeV、100GeV 的电子, 经过这些物质时, 多重散射角分别为多大?(不需要非常精确的结果)

(2): 简单介绍粒子穿过厚、薄介质时, 电离能量损失的分布有何不同, 为什么?

解: (1) 首先对于 1.1, 我先仔细去阅读了下粒子探测器相关的内容并进行梳理。

应当指出, 与电离能损公式 (1.11) 不同, 韧致辐射导致的能量损失正比于粒子能量, 反比于入射粒子质量的平方。

由于电子质量很小, 电子的韧致辐射导致的能量损失具有特别重要的作用。对于电子而言 ($z=1, m=m_e$), 方程 (1.54) 或 (1.55) 均可写成如下形式:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{X_0} \quad (1.56)$$

该方程定义了辐射长度 X_0 。辐射长度 X_0 的一个近似表达式已由式 (1.51) 给定。式 (1.51) 中的正比性

此处第一次提到了电子韧致辐射中辐射长度和能量衰减之间的关系

的辐射长度。但是由于存在正比性

$$X_0 \propto r_e^{-2} \quad (1.60)$$

以及关系式

$$r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e c^2}, \quad (1.61)$$

“辐射长度”也依赖于入射粒子的质量:

$$\tilde{X}_0 \propto m^2. \quad (1.62)$$

不过, 文献中所说的辐射长度总是指电子的辐射长度。

对式 (1.54) 或式 (1.56) 求积分, 得到

$$E = E_0 e^{-x/X_0}. \quad (1.63)$$

这里提到了辐射长度指的是电子的辐射长度, 它划定了主体是电子。还有此处对于带电粒子能量由于辐射损失指数衰减的公式

此外在多次散射部分, 提到了 x/X_0 是以辐射长度为单位的散射介质厚度

我们可以提取下概念, 总之, 辐射长度与能量损失息息相关, 我们要用损失的能量为本, 划定一个距离界定来定义辐射长度。

总结下: 辐射长度 X_0 是描述高能电子在物质中因韧致辐射发生能量损失的重要特征长度,

其定义为电子平均损失 $1 - \frac{1}{e}$ 的初始能量时所经过的距离。它与材料原子序数 Z 相关, 高 Z

辐射长度短

接下来再看一下核作用长度的概念

核作用长度是强子 (质子、 π 介子等) 在物质中发生一次强相互作用前平均经过的距离。他

的公式满足： $P(x) = e^{-x/\lambda_I}$ ，可以间接用来描述强相互作用的频率

个人思考：那核作用长度和辐射长度一般谁更长点？

去搜了搜发现：一般情况下 $\lambda_I > X$ ，其原因在于电磁作用比强相互作用更频繁，那单位路径上作用次数更多，作用截面更大，能量衰减极快，所以对应的长度就更短

接下来关于电子能量衰减的计算我们当然优先考虑辐射长度

$$E = E_0 e^{-x/X_0}$$

用的就是这个公式计算

$X=1\text{mm}=0.1\text{cm}$

碳： $x/X_0=0.1/19.3 \approx 0.0053$ $E/E_0 \approx e^{-0.0052} \approx 0.995$ 所以损失 0.5%

同理

铝： $x/X_0=0.1/8.9 \approx 0.011$ $E/E_0 \approx 0.989$ 所以损失 1.1%

铅： $x/X_0=0.285$ $E/E_0 \approx 0.752$ 所以损失 24.8%

这里又再次证明：高 Z 电子辐射能损很强，他的辐射长度短

然后到关于多重散射角的公式，从书里可以找到：定位在多次散射部分

布由莫里哀 (Moliere) 理论描述^[10-12,37]。当散射角比较小的时候，它是围绕其平均值 $\Theta = 0$ 的正态分布。但是，对于带电粒子与核碰撞导致的大散射角的情形，散射角常常大于高斯分布的预期值^[38]。

平面投影散射角分布的方均根由下式给定^[10-12]：

$$\Theta_{\text{rms}}^{\text{proj.}} = \sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left(1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0} \right), \quad (1.50)$$

式中 p (单位： MeV/c) 是动量， βc 是速度， z 是散射粒子电荷， x/X_0 是以辐射长度为单位的散射介质厚度 (见 1.1.5 小节)^[1,39-40]，

$$X_0 = \frac{A}{4\alpha N_A Z^2 r_e^2 \ln(183Z^{-1/3})}, \quad (1.51)$$

其中 Z 和 A 分别是吸收物质的原子序和原子量。

方程 (1.50) 只是一个近似表达式。对于大多数的实际应用，例如对于 $z=1$ 的粒子，它可进一步近似为

$$\Theta_{\text{rms}}^{\text{proj.}} = \sqrt{\langle \Theta \rangle^2} \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \sqrt{\frac{x}{X_0}}. \quad (1.52)$$

$$\theta_0 \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta p c} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left(1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0} \right)$$

采用此公式计算取数量级简单估算下

对于 1GeV 电子

碳： x/X_0 约 0.0052，取根号约 0.072，所以 θ_0 约为 $13.6/1000 * 0.072 = 0.001 \text{rad} = 1 \text{mrad}$

同理计算：铝约 1.5mrad, 铅约 6mrad.

发现：其实不难看出多重散射满足以下关系

$$\theta_0 \propto \frac{\sqrt{x/X_0}}{p}$$

所以对于 10GeV 的电子，散射角缩小 10 倍

碳 0.1mrad 铝 0.15mrad 铅 0.6mrad

对于 100GeV 散射角再缩小 10 倍

碳 0.01mrad 铝 0.015mrad 铅 0.06mrad

所以：能量越高散射角越小

X0 越小厚度越厚散射角越大

(2) 如图

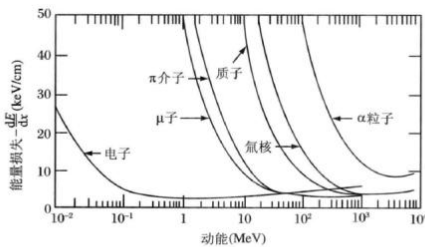


图 1.2 电子、μ子、π介子、质子、氦核和 α 粒子在空气中的电离能量损失

方程 (1.11) 所描述的只是带电粒子由电离和激发导致的平均能量损失。对于

但是对于厚吸收层，大能量传递导致的朗道分布的尾巴被压缩了^[24]。对于很厚的吸收体 ($dE/dx \cdot x \gg 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$)，能量损失分布可以用高斯分布作为近似。

不同元素 i 组成的化合物的能量损失 dE/dx 可表示为

$$\frac{dE}{dx} \approx \sum_i f_i \left. \frac{dE}{dx} \right|_i \quad (1.24)$$

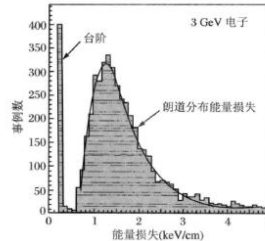
其中 f_i 是元素 i 的质量分数， $\left. \frac{dE}{dx} \right|_i$ 是元素 i 中的平均能量损失。由于电离常数对于分子结构的依赖导致的对于该关系式的修正是可以忽略的。

传递给电离电子的能量可能很大，以至于这些电离电子能够产生进一步的电离。这样的电离电子称为 δ 射线或击出电子。击出电子的能谱为^[1,19-12,25]

$$\frac{dN}{dE_{kin}} = \varepsilon \cdot \frac{F}{E_{kin}^2} \quad (1.25)$$

其中 $I \ll E_{kin} \ll E_{max}$ 。

对于 $E_{kin} \ll E_{max}$ ， F 是一个量级为 1 的依赖于自旋的因子^[22]。当然，当达到最大传递能量时，击出电子的能谱下降到 0。这一运动学极限也对因子 F 造成约束^[1,26]。击出电子能谱的自旋依赖只在接近最大传递能量时起作用^[1,25]。



吸收体 (即其厚度用式 (1.15) 计算，其平均能量损失 $\langle \Delta E \rangle \ll E_{max}$)，实际的能量损失对于平均能量损失存在很大的涨落。薄吸收体内的能量损失分布是极其不对称^[2-9]。

这种行为特征可以用朗道 (Landau) 分布加以参数化。朗道分布可以用函数 s^2 单拉普拉斯变换来描述^[15-18]。朗道分布的一种合理近似可表示为^[19-21]

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x + \xi)^2\right] \quad (1.19)$$

简单总结来说就是：

厚介质——高斯分布 对称+波动小+方差有限

原因：电离碰撞次数多，每次转移能量小，它是大量小碰撞汇成的，满足中心极限定理

薄介质——朗道分布 它有明显的右尾+最概然值不等于平均值

原因：碰撞次数有限，偶尔有 δ 电子产生，还有大涨落，不满足中心极限定理，所以是长尾

问题 2

泊松过程、泊松分布的性质和应用以及和二项分布、高斯分布的关系;母函数的性质及应用, 例:利用母函数证明两个泊松分布的随机变量的和仍是泊松分布

解: 泊松过程是一类非常重要的随机过程, 常用于描述在一定时间或空间范围内随机事件发生的次数。在粒子探测实验中, 许多计数型现象都可以近似看作泊松过程, 它的特点在于: 事件随机发生、彼此独立, 并且在相同长度的时间间隔内具有相同的平均发生率。

然后我去查找了下泊松分布的公式, 其公式如下:

设某随机事件在单位时间内的平均发生次数为 λ , 则在给定时间区间内恰好发生 n 次的概率为:

$$P(n) = (\lambda^n * \exp(-\lambda)) / n!$$

其中, λ 表示平均发生次数, n 表示实际发生次数, $\exp(-\lambda)$ 表示 e 的 $-\lambda$ 次方。

然后我们就要说到性质了, 泊松分布最重要的统计性质是均值和方差相等, 即:

$$E(n) = \lambda$$

$$\text{Var}(n) = \lambda$$

标准差为: $\sigma = \text{sqrt}(\lambda)$

这一性质在实验物理中非常重要。若某次实验测得 N 个计数, 则其统计涨落约为 $\text{sqrt}(N)$, 可以估计相对统计误差, 约为:

$$\sigma / N = 1 / \text{sqrt}(N) \quad \text{这说明计数越多, 相对误差越小}$$

然后再说说它和二项分布的关系

泊松分布也可以看作二项分布在稀有事件条件下的极限。二项分布描述 N 次独立试验中事件发生 n 次的概率, 其表达式为:

$$P(n) = C(N,n) * p^n * (1-p)^{(N-n)}$$

当试验次数 N 很大, 而单次事件发生概率 p 很小, 并且平均发生次数 Np 保持为 λ 时, 即:

$$N \rightarrow \infty$$

$$p \rightarrow 0$$

$$Np = \lambda$$

二项分布就会趋近于泊松分布：

因此，泊松分布本质上描述的是“大量机会中小概率事件发生次数”的统计规律。粒子探测中的许多计数过程正符合这一特征：单个微小时间间隔内探测到粒子的概率很低，但在较长时间内可以积累到一定数量的事件。

然后说它和高速分布关系这其实取决于我们的 λ

当 λ 较小时，泊松分布明显不对称，不能简单用高斯分布代替；但当 λ 足够大时，泊松分布会逐渐接近高斯分布：

也就是说，当平均计数很大时，可以近似认为计数涨落服从均值为 λ 、方差为 λ 的正态分布。这也是为什么低统计量实验分析通常使用泊松似然，而高统计量情况下可以使用高斯近似或 χ^2 方法。

再谈谈母函数（证明借用辅助整理）

定义泊松分布的概率母函数为：

$$G(t) = E(t^N)$$

将泊松分布代入，可得：

$$G(t) = \sum [t^n * (\lambda^n * \exp(-\lambda)) / n!]$$

$$G(t) = \exp(-\lambda) * \sum [(\lambda t)^n / n!]$$

由于：

$$\sum [(\lambda t)^n / n!] = \exp(\lambda t)$$

$$G(t) = \exp(-\lambda) * \exp(\lambda t)$$

最终得到泊松分布的母函数：

$$G(t) = \exp[\lambda(t - 1)]$$

母函数的意义在于，它可以非常方便地求出分布的统计性质，也可以用于证明多个独立泊松变量相加后的分布形式。

设两个独立随机变量分别服从泊松分布：

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \quad Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$$

则它们的概率母函数分别为：

$$G_X(t) = \exp[\lambda_1(t - 1)] \quad G_Y(t) = \exp[\lambda_2(t - 1)]$$

由于 X 和 Y 相互独立，所以 $X + Y$ 的母函数等于两个母函数的乘积：

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) * G_Y(t)$$

代入可得：

$$G_{X+Y}(t) = \exp[\lambda_1(t - 1)] * \exp[\lambda_2(t - 1)]$$

$$G_{X+Y}(t) = \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)(t - 1)]$$

这个形式仍然是泊松分布的母函数，只是参数从 λ_1 和 λ_2 变成了 $\lambda_1 + \lambda_2$ 。因此可以得到结论：

$$X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

这说明独立泊松变量之和仍然服从泊松分布，其平均值等于各自平均值之和。这个性质在粒子探测实验中非常常见。例如，若两个独立放射源分别产生平均计数 λ_1 和 λ_2 ，那么探测器测得的总计数仍服从泊松分布，平均计数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 。

问题三

从下面的链接中下载 root 文件，选取 X 方向前 5 个 bin，将其投影到 Y 方向作为新的 TH1D，这是粒子经过 300 微米硅微条探测器收集到的信号，指出其服从什么分布并拟合，并以论文的标准作图。

先说下大体思路：

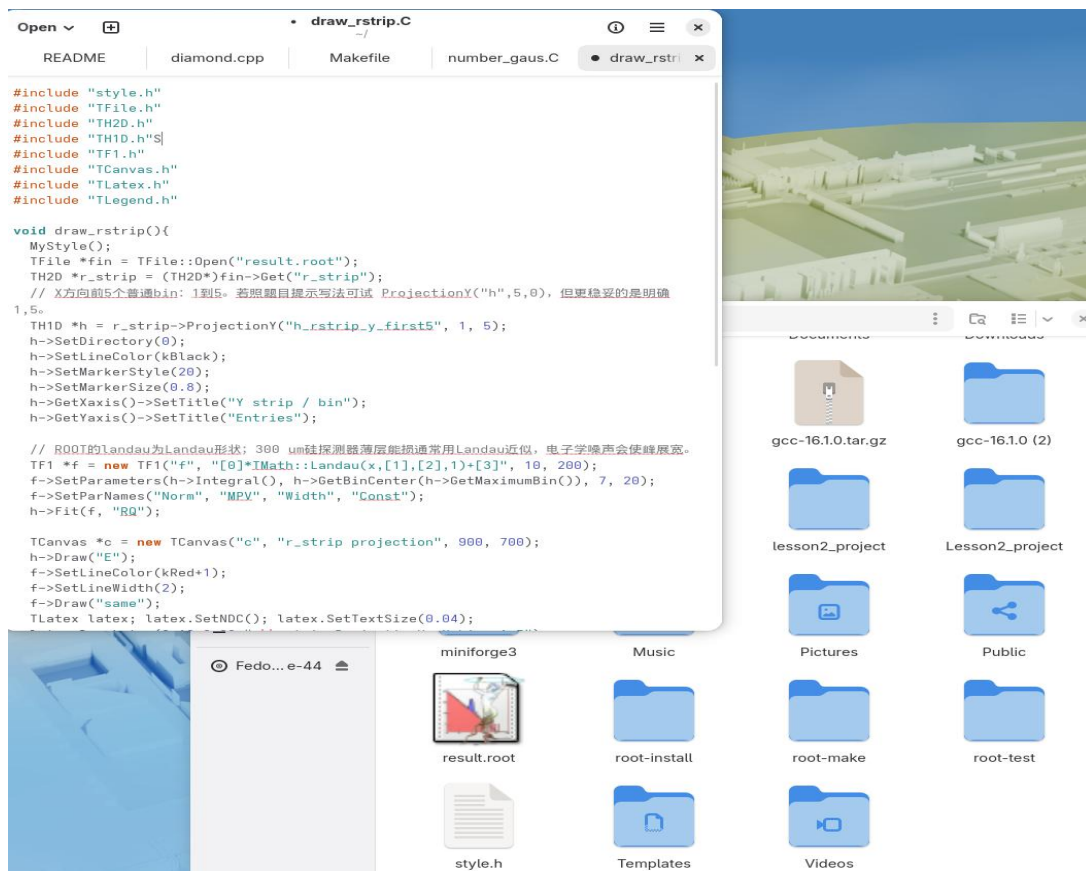
通过下载 root 文件，我们可以获取里面的数据，在其中选取下 X 方向前 5bin 投影到 y 方向，作为粒子经过 300 微米硅微条探测器收集到的信号。

首先使用 TFile::Open("result.root") 打开数据文件，并通过 Get("r_strip") 取出二维直方图 r_strip。随后选取 X 方向前 5 个普通 bin，即 bin 1 到 bin 5，使用 ProjectionY("h_rstrip_y_first5",1,5) 将其投影到 Y 轴，得到一维条带信号分布。

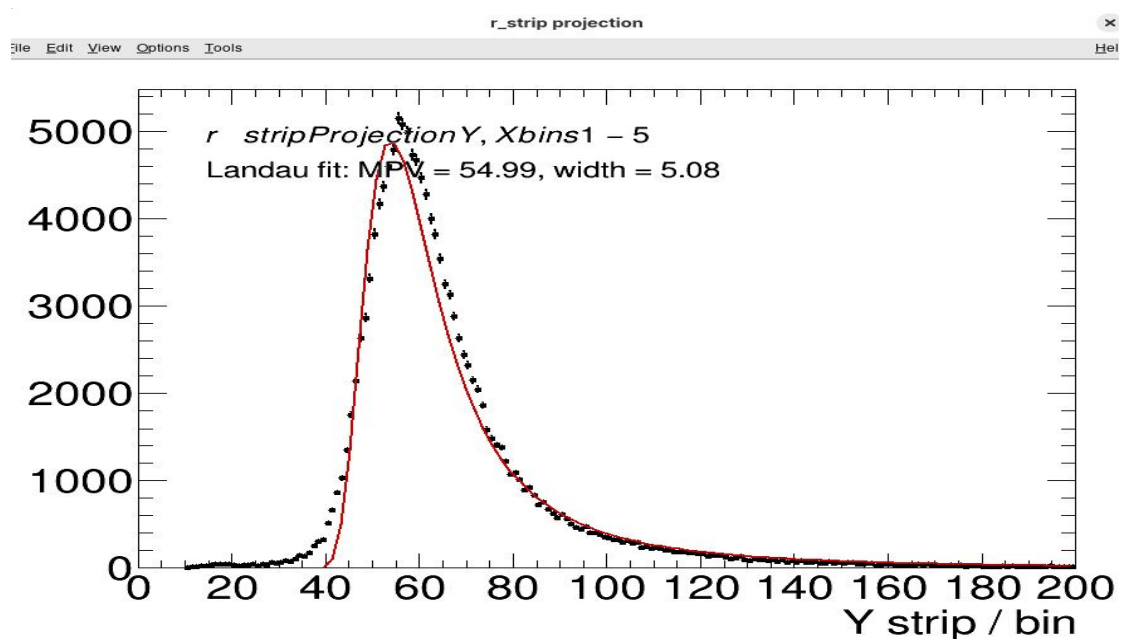
关于作图老师提到可以参考分享的 style.h，绘图时候加入到头文件，所以我们就直接 include 进去，编写好 c++root 程序，再使用 root 文件中的数据读取二维直方图

在 root 中运行后生成对应的 png 图片，观察拟合峰位置和宽度等信息

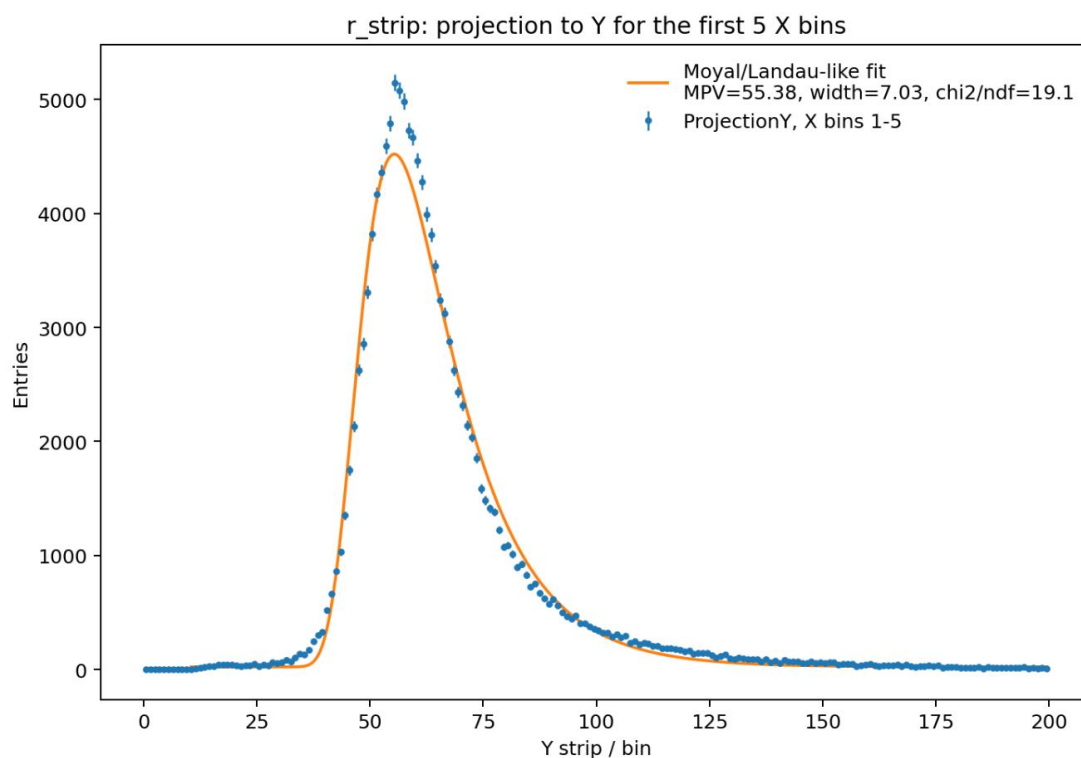
由于 300 μm 硅探测器属于薄探测层，带电粒子穿过硅时的电离能量损失具有明显 Landau 长尾，因此采用 Landau 函数加常数本底进行拟合。所以拟合函数为朗道函数！，其中 [1] 表示最可几值 MPV，[2] 表示分布宽度。



第一次出图样式是这样的



简单优化下色调成果是这样的



拟合结果显示，主峰位于约 55 bin 附近，宽度约为 7 bin。这说明信号主要集中在该条带位置附近，同时右侧存在典型的薄介质电离能损长尾。

拟合结果：投影总计数约 138355；用 Landau-like/Moyal 函数加常数底拟合，得到 MPV ≈ 55.38 bin，宽度 ≈ 7.03 bin

物理解释：300 um 硅微条探测器属于薄探测层。带电粒子穿过硅时电离产生电子-空穴对，薄层能量损失具有 Landau 型长尾；峰位置对应最可几沉积/收集电荷，右侧长尾来自少数较大电离能量转移事件。