

## 第三次作业

一.

辐射长度  $X_0$ :

AI 给出定义为: 辐射长度  $(X_0)$  定义为高能电子因韧致辐射损失能量, 使平均能量降至初始值的  $(1/e)$  所对应的物质厚度。它也是描述电磁簇射发展的特征长度。

由书上给出公式定义:

$$E = E_0 e^{-x/X_0} .$$

该函数描述了带电粒子能量由于辐射损失而按指数衰减。辐射长度表示了介质的一种性质。

核作用长度  $\lambda_I$ :

AI 给出定义为: 强子在物质中发生非弹性强相互作用的平均自由程称为核作用长度  $\lambda_I$ 。它定义为强子束流强度衰减到初始值的  $1/e$  所对应的物质厚度 (不包括弹性散射)。

由书上给出公式定义:

$$N = N_0 e^{-x/\lambda_I} .$$

该函数描述强子在物质中的指数吸收。

简单比较经过 1 毫米厚的碳、铝、钨板后电子的能量衰减到原来的多少。

根据书上第八页表 1.1 所示

赖关系.

表 1.1 最小电离粒子在不同物质中的平均能量损失<sup>[10-12]</sup> (气体为标准气压和温度)

吸收物质	$\left. \frac{dE}{dx} \right _{\min} [\text{MeV}/(\text{g} \cdot \text{cm}^{-2})]$	$\left. \frac{dE}{dx} \right _{\min} (\text{MeV}/\text{cm})$
氢(H <sub>2</sub> )	4.10	$0.37 \cdot 10^{-3}$
氦	1.94	$0.35 \cdot 10^{-3}$
锂	1.64	0.87
铍	1.59	2.94
碳(石墨)	1.75	3.96
氮	1.82	$2.28 \cdot 10^{-3}$
氧	1.80	$2.57 \cdot 10^{-3}$
空气	1.82	$2.35 \cdot 10^{-3}$
二氧化碳	1.82	$3.60 \cdot 10^{-3}$
氟	1.73	$1.56 \cdot 10^{-3}$
铝	1.62	4.37
硅	1.66	3.87
氩	1.52	$2.71 \cdot 10^{-3}$
钛	1.48	6.72
铁	1.45	11.41
铜	1.40	12.54
锆	1.37	7.29
锡	1.26	9.21
氙	1.25	$7.32 \cdot 10^{-3}$
钨	1.15	22.20
铂	1.13	24.24
铅	1.13	12.83
铀	1.09	20.66
水	1.99	1.99
合成树脂	1.95	2.30
混凝土	1.70	4.25
石英(SiO <sub>2</sub> )	1.70	3.74

简单计算可得:

碳: 0.396MeV

铝: 0.437MeV

钨: 2.220MeV

根据书上 17 页公式 (1.50)

$$\Theta_{\text{rms}}^{\text{proj}} = \sqrt{\langle \Theta^2 \rangle} = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left( 1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0} \right), \quad (1.50)$$

对于电子,

$z=1$ ; 高能下  $\beta \approx 1$ ;  $p$  为电子动量 (GeV/c, 数值上等于电子能量);  $x$  为物质厚度,  $X_0$  为物质的辐射长度。

利用 AI 帮助计算：

物质	辐射长度 X <sub>0</sub> (cm)	厚度 x=0.1cm 时 x/X <sub>0</sub>
碳	42.7	0.1/42.7≈0.00234
铝	8.9	0.1/8.9≈0.0112
钨	0.35	0.1/0.35≈0.286

电子能量	碳 (1 mm)	铝 (1 mm)	钨 (1 mm)
1 GeV	6.6×10 <sup>-4</sup> rad	1.4×10 <sup>-3</sup> rad	7.3×10 <sup>-3</sup> rad
10 GeV	6.6×10 <sup>-5</sup> rad	1.4×10 <sup>-4</sup> rad	7.3×10 <sup>-4</sup> rad
100 GeV	6.6×10 <sup>-6</sup> rad	1.4×10 <sup>-5</sup> rad	7.3×10 <sup>-5</sup> rad

不过对于 Z=1 的粒子，式 (1.50) 可以进一步近似为式 (1.52)：

$$\Theta_{\text{rms}}^{\text{proj.}} = \sqrt{\langle \Theta \rangle^2} \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \quad (1.52)$$

粒子穿过厚、薄介质时，电离能量损失分布的不同：

薄吸收体内的能量损失分布是极其不对称的，这种行为特征可以用朗道分布加以参数化：

$$L(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda + e^{-\lambda})\right], \quad (1.19)$$

如图 1.3 所示：

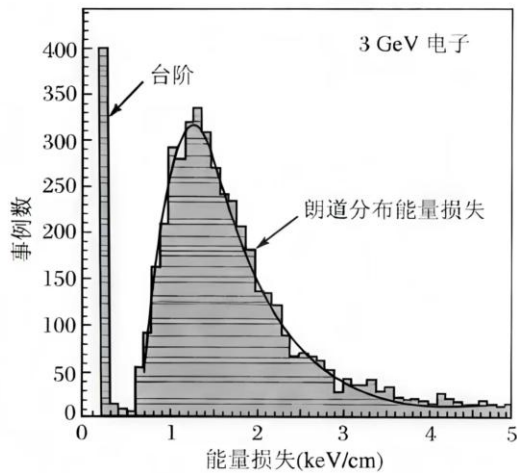


图 1.3 3 GeV 电子在工作气体为 Ar/CH<sub>4</sub> (80 : 20) 的薄漂移室中的能量损失分布

实际能量损失分布往往比朗道分布要宽

但是对于厚吸收层，大能量传递导致的朗道分布的尾巴被压缩了。对于很厚的吸收体，能量损失分布可以用高斯分布作为近似。

## 二.

这里我利用 AI 梳理了这一块知识点：

### 泊松分布

1. 定义：设离散型随机变量  $X$  取值为  $0, 1, 2, \dots$

概率公式： $P(X=k) = (\lambda^k / k!) \cdot e^{(-\lambda)}$  ,  $k=0, 1, 2, \dots$

称  $X$  服从泊松分布，记作  $X \sim P(\lambda)$ 。

$\lambda > 0$  为分布参数，代表单位时间或空间内事件平均发生次数。

2. 数字特征：数学期望  $E(X) = \lambda$  方差  $D(X) = \lambda$  标准差  $\sigma = \sqrt{\lambda}$

3. 概率单调性：概率  $P(X=k)$  先增大后减小。 $\lambda$  为非整数时， $k=\lambda$  处概率最大；

$\lambda$  为整数时， $k=\lambda$  与  $k=\lambda-1$  处概率同为最大值。

4. 条件分布：两个独立泊松变量，给定两者之和时，条件分布为二项分布。
5. 应用场景（粒子探测/核物理）：
  1. 放射性核素衰变计数
  2. 宇宙线、高能粒子入射探测器的事例计数
  3. 光电倍增管接收光子数、探测器本底计数
  4. 粒子束流打靶的粒子数量统计

## 二、泊松过程

**1. 定义：**设随机过程  $\{N(t), t \geq 0\}$ ,  $N(t)$  表示时间段  $[0, t]$  内发生的事件总数。满足以下条件，即为强度为  $\lambda$  的泊松过程：

1.  $N(0)=0$ ，初始时刻无事件发生
2. 独立增量：互不相交的时间区间内，事件发生数量相互独立
3. 平稳增量：区间内事件数只和区间长度有关，与区间起点无关
4. 稀疏性：极短时间内最多只发生 1 个事件

**2. 核心结论：**对任意时间长度  $t$ ，有  $N(t) \sim P(\lambda t)$ 。含义：固定时长内，泊松过程的事件计数服从泊松分布。

**3. 应用：**描述连续时间内独立、稀疏、随机的计数过程，是辐射测量、粒子探测统计的基础模型。

## 三、泊松分布与二项分布、高斯分布的关系

### 1. 泊松分布与二项分布

(1) 二项分布定义：

若  $X \sim B(n, p)$ ，概率公式： $P(X=k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ ， $k=0, 1, \dots, n$ 。  $n$  为试验总次数， $p$  为单次试验事件发生概率。

(2) 泊松近似（泊松极限定理）：

当  $n$  趋近无穷大、 $p$  趋近于 0，且  $np=\lambda$  为定值时， $C(n, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$  近似等于  $(\lambda^k / k!) \cdot e^{-\lambda}$ 。

(3) 物理解解:

试验总数大、单次事件发生概率极低、平均事件数固定时，二项分布退化为泊松分布。

## 2. 泊松分布与高斯（正态）分布

(1) 正态近似（中心极限定理）:

当  $\lambda$  远大于 1，常用判断标准  $\lambda > 20$ ，泊松分布可近似为正态分布： $P(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$ 。

(2) 补充说明:

泊松是离散分布，正态是连续分布，近似计算时需要做连续性修正。高计数率探测器中，计数误差直接取  $\sigma = (\sqrt{\lambda})$ 。

## 3. 分布演化关系链

二项分布  $\rightarrow$  泊松分布 ( $n$  大、 $p$  小,  $np=\lambda$ )  $\rightarrow$  高斯分布 ( $\lambda$  很大)



拟合结果分析：蓝色散点为统计的实验数据，红色曲线为拟合结果。  
显然，由于拟合采用高斯拟合过程，对比实验数据朗道分布。尾巴被压缩了一部分。可见在主峰附近朗道分布和高斯分布是较为接近的。