第一题

辐射长度：高能电子在物质中通过韧致辐射损失能量，能量衰减到原来的 1/e 所需的平均厚度。

需要强调的是，与电离能损不同，韧致辐射能损正比于入射粒子的能量，而反比于其质量平方。

由于电子是最轻的带电粒子，其韧致辐射能损非常显著。将式(2.1.20)改写为以下形式

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}=\frac{E}{X_0} \tag{2.1.21}$$

此式定义了一个新的物理量 X_0，称为辐射长度，它表示的是一个高能电子通过韧致辐射能量损失到 1/e（此处 e 为自然对数常数）所经过的平均路程。由式(2.1.20)和(2.1.21)，显然有

$$X_0=\frac{A}{4\alpha N_A Z^2 r_e^2 \ln(183/Z^{1/3})}[\mathrm{g/cm^2}] \tag{2.1.22}$$

辐射长度与物质原子序数的关系大致为 $X_0 \propto Z^{-2}$，这来源于粒子与核的库仑场的相互作用。

核作用长度：强子在物质中发生强相互作用的平均自由程。

高能强子通过介质时与原子核会发生弹性散射和非弹性散射。非弹性散射，即碰撞过程中伴随有次级粒子产生。当能量在 GeV 以上量级时，质子-质子散射的总截面趋于常数，～50 mb（$1\ \mathrm{mb}=10^{-27}\ \mathrm{cm^2}$）。而在低能区，弹性截面和非弹性截面随能量不同均有较大的变化[13]，见图 2.3.1 所示。

$$\sigma_{\text{total}}=\sigma_{\text{elastic}}+\sigma_{\text{inelastic}} \tag{2.3.1}$$

类似于光子束，可以根据强子束强度在物质中的衰减定义核相互作用长度 λ_I

$$N=N_0 e^{-x/\lambda_I} \tag{2.3.2}$$

λ_I 可以通过强子截面的非弹性部分计算

$$\lambda_I=\frac{A}{N_A \rho \sigma_{\text{inelastic}}}[\mathrm{cm}] \tag{2.3.3}$$

碳、铝、钨的辐射长度分别约为 186 mm、89 mm、3.5 mm，核作用长度分别约为 386 mm、397 mm、99 mm。

经过 1 mm 厚的板：

碳：电子能量还剩原来的 99.5%

铝：电子能量还剩原来的 98.9%

钨：电子能量还剩原来的 75.1%

多重散射角公式如下：

2.1.2 多次散射

带电粒子穿过物质时会被原子核和电子的库仑势散射(对于强子,强相互作用也有部分贡献),每次散射都将轻微地影响粒子的运动,大量散射过程的结果就是带电粒子将略微偏离原来的入射方向,如图 2.1.5 所示。库仑散射的散射角分布由莫里哀(Molière)理论描述[11],对小角度散射,散射角 $\theta(=\theta_{\text{space}})$ 分布在平均值 0 附近,可以用高斯分布描述;因带电粒子与核碰撞而产生的大角度散射则类似于卢瑟福散射,其分布具有较高的尾部(与高斯分布相比)。

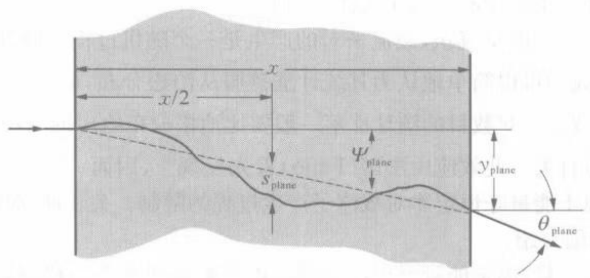


图 2.1.5　带电粒子在物质中的多次散射示意图(粒子沿页面水平入射)

由图 2.1.5,选取页面为参考平面,投影到该平面的入射粒子的散射角(θ_{plane})分布均方根(root mean square,rms)可以近似表述为

$$\theta_{\text{plane}}^{\text{rms}}=\sqrt{\langle\theta_{\text{plane}}^{2}\rangle}=\frac{13.6}{\beta cp}z\sqrt{\frac{x}{X_0}}\left[1+0.038\ln\frac{x}{X_0}\right] \tag{2.1.16}$$

其中动量 p 单位为 MeV/c,x/X_0 是以辐射长度为量度的物质厚度。辐射长度 X_0 的定义详见后文。在 $10^{-3}<x/X_0<10^{2}$ 范围内,公式(2.1.16)对所有的纯物质均成立,其误差好于 11%。

式(2.1.16)还可以进一步简化,对于绝大多数实际应用情况,有

$$\theta_{\text{plane}}^{\text{rms}}=\frac{13.6}{\beta cp}\sqrt{\frac{x}{X_0}} \tag{2.1.17}$$

其中 z 已取为 1。θ_{plane} 考虑的是二维情况,当需要考虑三维情况时,有

$$\theta_{\text{space}}^{\text{rms}}=\sqrt{2}\,\theta_{\text{plane}}^{\text{rms}}=\frac{19.2}{\beta cp}\sqrt{\frac{x}{X_0}} \tag{2.1.18}$$

1 GeV 电子：碳约 1.0，铝约 1.4，钨约 7.3
10 GeV 电子：碳约 0.10，铝约 0.14，钨约 0.73
100 GeV 电子：碳约 0.010，铝约 0.014，钨约 0.073
能量越高，多重散射角越小。相同能量下，多重散射角钨＞铝＞碳。

薄介质：能量损失服从朗道分布，不对称，有明显长尾，峰值低于平均值。原因是碰撞次数少，偶尔的大能量转移不可忽略。

厚介质：能量损失趋近高斯分布，对称。原因是碰撞次数多，中心极限定理起作用。

第二题

泊松过程：一种描述连续事件在时间间隔内发生的次数的随机过程。

满足以下三个性质：

1. 独立性：事件在不相交的时间区间内相互独立。
2. 普通性：在足够短的时间区间内，事件发生一次的概率与该区间的长度成正比，发生两次及以上的概率可以忽略不计。
3. 平稳性：在相同长度的时间区间内，事件发生的平均次数相同，即事件发生率不随时间变化。

应用：放射性核素衰变、宇宙射线粒子射入地球大气层、探测器计数。

泊松分布：若随机变量 X 表示某单位时间内发生的事件数，且事件服从泊松分布，则记为。

泊松分布：

设 $X \sim P(\lambda)$ $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k=0,1,2\cdots)$

性质：

1、期望与方差相等：$E(X)=\lambda$，$D(X)=\lambda$

2、可加性：独立泊松随机变量之和仍为泊松分布.

3. 稀有事件近似：二项分布 $B(n,p)$ 当 n 大、p 小，$\lambda=np$ 适中时趋近于泊松分布.

与二项分布、高斯分布的关系：

1 与二项分布：泊松分布是二项分布的极限形式 $(n\to\infty, p\to\infty, np\to\lambda$ 固定$)$

2. 与高斯分布：当 $\lambda\to\infty$ 时，泊松分布近似于高斯分布 $N(\lambda,\lambda)$

应用举例：描述单位时间内/空间内稀有事件的次数. 如放射性衰变计数；电话台呼叫数；交通事故发生数

母函数性质及其应用

母函数性质及应用

一、母函数定义

对于非负整数随机变量X，母函数为：

$$G(s)=E[s^X]=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)s^k,\ |s|\le 1$$

二、母函数的性质

1. 若X，Y独立，则 $G_{X+Y}(s)=G_X(s)\cdot G_Y(s)$，即独立变量

NO.

DATE

和的母函数等于各变量母函数的乘积。

2. 母函数可求期望，方差：

$E[X]=G'(1)$（期望值 = 母函数在 $s=1$ 处的斜率）

$D(X)=G''(1)+G'(1)-[G'(1)]^2=E[X^2]-(E[X])^2$

利用母函数证明两个泊松分布的随机变量的和仍为泊松分布

设 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$ 且X与Y独立

则母函数为 $G_X(s)=e^{\lambda_1(s-1)}$，$G_Y(s)=e^{\lambda_2(s-1)}$

由性质1：独立变量和的母函数 = 母函数之积可得：

$$G_{X+Y}(s)=G_X(s)\cdot G_Y(s)=e^{\lambda_1(s-1)}\cdot e^{\lambda_2(s-1)}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$$

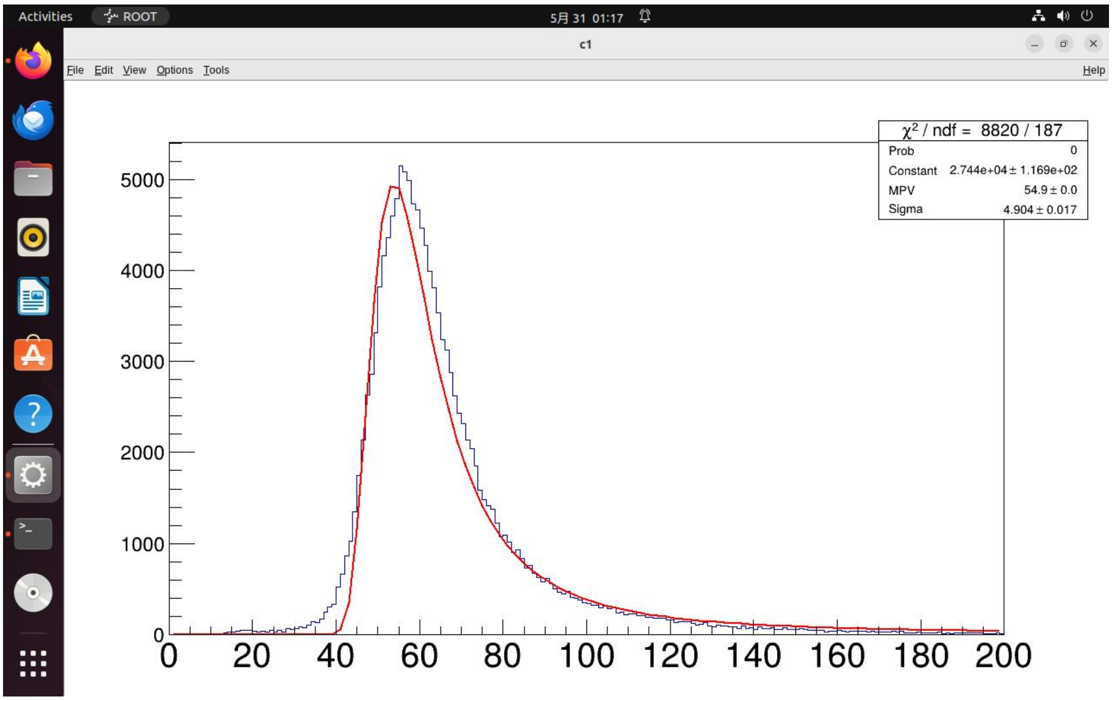
$\because e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$ 为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布母函数，

因此 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

第三题

先按提示 1 的代码试了一下，投影参数写的是 5 和 0。

发现投影结果是空的，没有生成图像。发现是参数顺序有问题，5 和 0 导致 ROOT 无法正确选取 bin 范围。后来改成正常参数（应该是 1，5），取 X 方向第 1 到第 5 个 bin，就正常生成了图像。



从直方图可以看出：峰值在 55 附近，右侧有明显长尾，一直拖到 150 以上，左侧上升较陡，右侧下降缓慢，这是典型的朗道分布特征。

之后用 h1->Fit("landau")进行拟合，拟合参数如下：

Constant（归一化常数）= 27440 ± 117

MPV（最概然能量损失）= 54.9 ± 0.0

Sigma（分布宽度）= 4.904 ± 0.017