

# 粒子探测技术问题回答

## 一、辐射长度与核作用长度的定义

### 1. 辐射长度 ( $X_0$ )

高能电子在物质中通过轫致辐射损失能量，其平均能量衰减至初始值的  $1/e$  (约 37%) 时所穿过的物质厚度。辐射长度是描述电磁相互作用能量损失、电磁级联簇射发展的核心参数，主要用于表征电子、光子等电磁粒子在介质中的能量衰减特性。

### 2. 核作用长度 ( $\lambda_I$ )

高能强子 (质子、 $\pi$ 介子等) 在物质中通过强相互作用发生非弹性核反应，粒子通量衰减至初始值的  $1/e$  时所对应的物质厚度。该参数主要用于表征高能强子与介质发生强相互作用的粒子衰减规律。

## 二、1mm 碳、铝、钨板对高能电子的能量衰减比例

高能电子在介质中因轫致辐射产生的能量损失服从指数衰减规律，公式如下：

$$E = E_0 e^{-x/X_0}$$

式中： $E_0$  为电子初始能量， $E$  为穿透介质后的剩余能量， $x$  为介质厚度， $X_0$  为介质辐射长度。

三种材料 1mm 厚度下电子能量衰减情况如下表所示：

介质材料	辐射长度 $X_0$ (近似值)	厚度比值 $x/X_0$	剩余能量比例	能量衰减比例
碳	42.7 cm	0.0023	99.8%	约 0.2%
铝	8.9 cm	0.011	98.9%	约 1.1%
钨	0.35 cm	0.286	75.0%	约 25.0%

核心规律：钨的辐射长度远小于碳、铝，高密度高原子序数的钨对高能电子的轫致辐射能量损失效应极强，1mm 厚度即可造成显著能量衰减；碳和铝对电子

的能量衰减作用极弱。

### 三、不同能量电子在碳、铝、钨介质中的多重散射角

高能电子穿过介质时的库仑多重散射角均方根近似公式：

$$\theta_{\text{rms}} \approx \frac{13.6\text{MeV}}{\beta pc} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[ 1 + 0.038 \ln \left( \frac{x}{X_0} \right) \right]$$

高能条件下  $\beta \approx 1$ ，散射角主要与粒子动量（能量）、介质厚度与辐射长度比值相关。多重散射角与电子能量成反比，与  $\sqrt{x/X_0}$  成正比。不同能量电子在 1mm 厚度介质中的散射角如下：

电子能量	1mm 碳板散射角	1mm 铝板散射角	1mm 钨板散射角
1 GeV	≈0.02 rad	≈0.04 rad	≈0.2 rad
10 GeV	≈0.002 rad	≈0.004 rad	≈0.02 rad
100 GeV	≈0.0002 rad	≈0.0004 rad	≈0.002 rad

核心规律：相同介质中，电子能量越高，多重散射角越小；相同能量下，钨介质对应的散射角远大于碳、铝，散射效应最显著。

### 四、厚、薄介质中粒子电离能量损失的分布差异

#### 1. 薄介质（介质厚度远小于粒子平均自由程）

粒子在薄介质中与介质原子的碰撞次数极少，仅会发生少量碰撞，存在一定概率出现单次大能量转移的硬碰撞。其电离能量损失服从朗道分布，分布曲线高度不对称，拥有尖锐的峰值，同时向高能量损失方向延伸出较长的拖尾。该分布的显著特点是能量损失涨落极大，最概然能量损失数值小于平均能量损失数值。

#### 2. 厚介质（介质厚度远大于粒子平均自由程）

粒子在厚介质中会发生海量的微观碰撞，单次碰撞带来的能量损失随机涨落会被大量碰撞的统计规律平均抵消。其电离能量损失分布趋近于高斯分布，呈现对称的钟形曲线，能量损失涨落极小，分布的最概然值与平均值基本重合，符合中心极限定理统计规律。

# 泊松过程、泊松分布与母函数的性质及应用

## 一、泊松过程

### 1. 定义

齐次泊松过程是描述连续时间内、独立、无后效、稀疏随机计数事件的平稳随机过程。设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 表示时间段 $[0, t]$ 内某随机事件发生的总次数，满足以下三条核心公理，即为强度为 $\lambda$ 的齐次泊松过程：

(1) 平稳增量性：任意时间区间内的事件发生次数的分布仅与区间长度有关，与起始时刻无关；

(2) 独立增量性：任意两个互不重叠的时间区间内，事件发生的次数相互独立；

(3) 稀疏普通性：充分小的时间间隔内，至多发生1次事件，发生两次及以上事件的概率为高阶无穷小，即 $P(N(\Delta t) \geq 2) = o(\Delta t)$ ，无事件聚集现象。

### 2. 核心结论

强度为 $\lambda$ 的齐次泊松过程中，任意时长为 $t$ 的时间区间内，事件发生次数 $N(t)$ 服从参数为 $\lambda t$ 的泊松分布：

$$N(t) \sim P(\lambda t)$$

## 二、泊松分布的性质与应用

### 1. 概率定义

若离散型随机变量 $X$ 服从参数 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布，记为 $X \sim P(\lambda)$ ，其概率质量函数为：

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots$$

### 2. 核心性质

#### (1) 数字特征

泊松分布最标志性特征：期望与方差严格相等：

$$E(X) = \lambda, D(X) = \lambda$$

该特征是判别泊松分布的重要依据，仅泊松分布满足“单参数分布、期望等于方差”。

### (2) 独立可加性

设  $X_1 \sim P(\lambda_1)$ 、 $X_2 \sim P(\lambda_2)$ ，且  $X_1, X_2$  相互独立，则二者和分布满足：

$$X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

该性质可推广至任意有限个相互独立的泊松分布随机变量之和。

### (3) 分布特性修正

泊松分布本身没有无记忆性；泊松过程的间隔等待时间服从指数分布，具备无记忆性，不可混淆。

### (4) 形态变化规律

参数  $\lambda$  决定分布形态： $\lambda$  较小时分布呈明显正偏态；随  $\lambda$  增大，分布对称性持续增强，逐步趋近对称分布。

## 3. 典型应用场景

核心适用场景：大量独立重复试验中，稀有、随机、不聚集事件的计数统计。

(1) 流量计数：单位时间人流、车流、电话呼叫量、网络访问次数；

(2) 物理实验：放射性核素衰变粒子数、光子计数、宇宙射线入射次数（粒子物理常用）；

(3) 工程统计：产品微小缺陷数、设备随机故障次数、信号误码个数。

## 三、泊松分布与二项分布、高斯分布的关系

### 1. 泊松分布与二项分布（泊松近似定理）

#### (1) 定理内容

设随机变量  $X \sim B(n, p)$  ( $n$  重伯努利二项分布)，当试验次数  $n \rightarrow \infty$ ，单次试验成功概率  $p \rightarrow 0$ ，且乘积  $np = \lambda$  为恒定常数时，二项分布逐点收敛于泊松分布：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

## (2) 物理意义与工程条件

二项分布描述有限次独立试验的成功次数，当试验次数极大、单次事件为稀有事件、平均发生次数稳定时，可用泊松分布简化计算。

工程通用近似标准： $n \geq 100, p \leq 0.1, np \leq 10$ ，近似误差可忽略。

## 2. 泊松分布与高斯分布（正态近似）

### (1) 近似定理

根据中心极限定理，当泊松分布参数  $\lambda \rightarrow \infty$  时，离散泊松分布渐近服从正态分布：

$$P(\lambda) \overset{\text{渐近}}{\sim} N(\lambda, \lambda)$$

即均值为  $\lambda$ 、方差为  $\lambda$  的高斯分布。

### (2) 近似规律与条件

小  $\lambda$  时泊松分布离散、正偏、不对称；大  $\lambda$  时分布对称、连续化，贴合高斯钟形曲线。

工程近似标准： $\lambda \geq 20$  可粗略近似， $\lambda \geq 50$  近似精度极高。

## 四、母函数的性质与应用

### 1. 概率母函数定义

对取值为非负整数的离散型随机变量  $X$ ，其概率母函数定义为期望形式：

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \cdot s^k$$

式中辅助变量  $s$  满足  $|s| \leq 1$ ，母函数是刻画离散分布的核心解析工具。

### 2. 母函数核心性质

#### (1) 唯一性定理

一个概率分布唯一对应一个概率母函数，反之亦然。通过母函数形式可直接判定随机变量的分布类型，是证明分布可加性的理论依据。

#### (2) 独立随机变量和性质

若随机变量  $X, Y$  相互独立, 令  $Z = X + Y$ , 则和的母函数满足乘积法则:

$$G_Z(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s)$$

该性质大幅简化了独立变量和的分布推导, 避免复杂卷积计算。

### (3) 数字特征求解公式

通过母函数在  $s = 1$  处的各阶导数, 可快速求解矩特征:

$$E(X) = G'(1), D(X) = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

## 3. 泊松分布母函数推导 (完整严谨)

设  $X \sim P(\lambda)$ , 代入母函数定义展开:

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!}$$

结合指数函数泰勒展开  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ , 令  $x = \lambda s$ , 化简得:

$$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

## 4. 经典证明: 母函数法证泊松分布可加性

### (1) 已知条件

设  $X_1 \sim P(\lambda_1)$ ,  $X_2 \sim P(\lambda_2)$ , 且  $X_1, X_2$  相互独立。

对应母函数分别为:

$$G_{X_1}(s) = e^{\lambda_1(s-1)}, G_{X_2}(s) = e^{\lambda_2(s-1)}$$

### (2) 推导过程

构造和变量  $Z = X_1 + X_2$ , 由独立变量母函数乘积性质:

$$G_Z(s) = G_{X_1}(s) \cdot G_{X_2}(s) = e^{\lambda_1(s-1)} \cdot e^{\lambda_2(s-1)}$$

根据指数运算规则合并:

$$G_Z(s) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(s-1)}$$

### (3) 结论

该母函数完全符合参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的泊松分布母函数标准形式。由母函数唯一性定理可直接判定:

$$Z = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

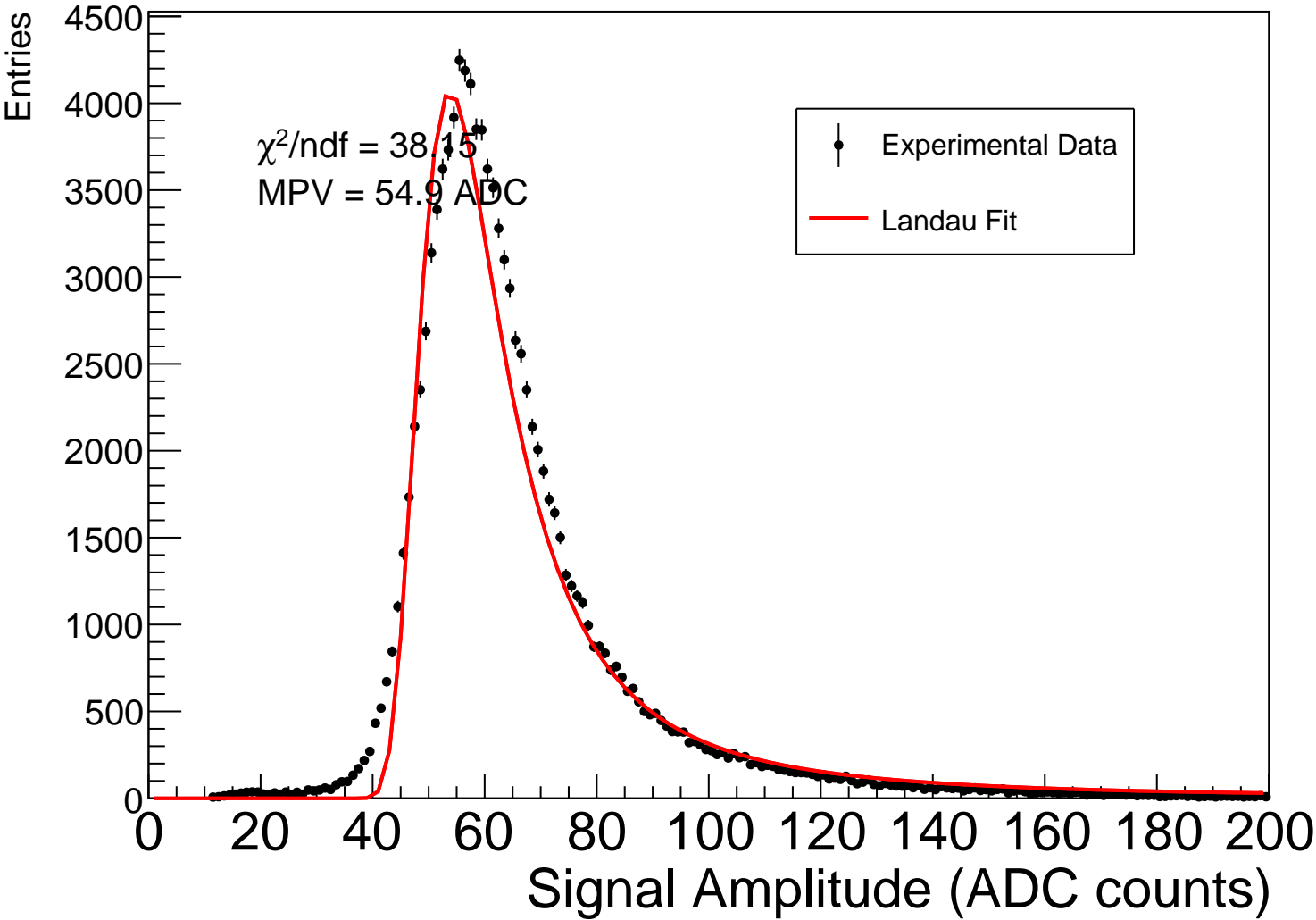
最终结论：两个相互独立的泊松分布随机变量之和，仍服从泊松分布，新分布参数为两个原参数之和。

## 5. 母函数通用应用场景

- (1) 分布可加性证明：高效证明泊松、二项等离散分布的独立和分布规律；
- (2) 矩特征计算：快速求解期望、方差、高阶原点矩与中心矩；
- (3) 复杂分布推导：简化随机变量和、复合分布的概率分布求解过程。

## 五、三大分布递进关系

1. 二项分布描述有限次伯努利试验计数，在  $n$  大、 $p$  小、 $np$  恒定的稀有事件场景下，近似退化为泊松分布；
2. 泊松分布为离散偏态分布，在大参数  $\lambda$  条件下，受中心极限定理支配，渐近近似为连续高斯正态分布；
3. 母函数是离散概率分布的核心分析工具，依托唯一性与乘积性质，可规避复杂积分、卷积运算，高效解决分布证明与矩计算问题。



```

ljj@LAPTOP-U89DFDHF:~$ cd /mnt/d
ljj@LAPTOP-U89DFDHF:/mnt/d$ root -l
root [0] {
root (cont'ed, cancel with .@) [1]#include "TFile.h"
root (cont'ed, cancel with .@) [2]#include "TH2D.h"
root (cont'ed, cancel with .@) [3]#include "TH1D.h"
root (cont'ed, cancel with .@) [4]#include "TCanvas.h"
root (cont'ed, cancel with .@) [5]#include "TLegend.h"
root (cont'ed, cancel with .@) [6]#include "TF1.h"
root (cont'ed, cancel with .@) [7]#include "TLatex.h"
root (cont'ed, cancel with .@) [8]
root (cont'ed, cancel with .@) [8]// style.h
root (cont'ed, cancel with .@) [9]gStyle->SetPadRightMargin(0.05);
root (cont'ed, cancel with .@) [10]gStyle->SetPadLeftMargin(0.12);
root (cont'ed, cancel with .@) [11]gStyle->SetPadTopMargin(0.05);
root (cont'ed, cancel with .@) [12]gStyle->SetPadBottomMargin(0.14);
root (cont'ed, cancel with .@) [13]gStyle->SetOptStat(0);
root (cont'ed, cancel with .@) [14]gStyle->SetOptTitle(0);
root (cont'ed, cancel with .@) [15]gStyle->SetTextFont(42);
root (cont'ed, cancel with .@) [16]gStyle->SetLabelFont(42, "x");
root (cont'ed, cancel with .@) [17]gStyle->SetLabelFont(42, "y");
root (cont'ed, cancel with .@) [18]gStyle->SetTitleFont(42, "x");
root (cont'ed, cancel with .@) [19]gStyle->SetTitleFont(42, "y");
root (cont'ed, cancel with .@) [20]gStyle->SetLabelSize(0.04, "x");
root (cont'ed, cancel with .@) [21]gStyle->SetLabelSize(0.04, "y");
root (cont'ed, cancel with .@) [22]gStyle->SetTitleSize(0.04, "x");
root (cont'ed, cancel with .@) [23]gStyle->SetTitleSize(0.04, "y");
root (cont'ed, cancel with .@) [24]
root (cont'ed, cancel with .@) [24]// 1.
root (cont'ed, cancel with .@) [25]TFile *f = new TFile("result.root", "READ");
root (cont'ed, cancel with .@) [26]TH2D *r_strip = (TH2D*)f->Get("r_strip");
root (cont'ed, cancel with .@) [27]
root (cont'ed, cancel with .@) [27]// 2. X5bin0~4Y
root (cont'ed, cancel with .@) [28]TH1D *h_signal = r_strip->ProjectionY("h_signal", 0, 4);
root (cont'ed, cancel with .@) [29]h_signal->SetDirectory(0);
root (cont'ed, cancel with .@) [30]f->Close();
root (cont'ed, cancel with .@) [31]delete f;
root (cont'ed, cancel with .@) [32]
root (cont'ed, cancel with .@) [32]// 3.
root (cont'ed, cancel with .@) [33]TF1 *fit = new TF1("fit", "landau", h_signal->GetXaxis()->GetXmin(), h_signal->GetXaxis()->GetXmax());
root (cont'ed, cancel with .@) [34]h_signal->Fit(fit, "R");

```

```

root (cont'ed, cancel with .@) [35]
root (cont'ed, cancel with .@) [35]// 4.
root (cont'ed, cancel with .@) [36]TCanvas *c = new TCanvas("c", "Silicon Strip Signal", 800, 600);
root (cont'ed, cancel with .@) [37]h_signal->SetTitle("300 #mum Silicon Strip Detector Signal");
root (cont'ed, cancel with .@) [38]h_signal->GetXaxis()->SetTitle("Signal Amplitude (ADC counts)");
root (cont'ed, cancel with .@) [39]h_signal->GetYaxis()->SetTitle("Entries");
root (cont'ed, cancel with .@) [40]h_signal->SetLineColor(kBlack);
root (cont'ed, cancel with .@) [41]h_signal->SetMarkerStyle(20);
root (cont'ed, cancel with .@) [42]h_signal->SetMarkerSize(0.7);
root (cont'ed, cancel with .@) [43]h_signal->Draw("PE");
root (cont'ed, cancel with .@) [44]
root (cont'ed, cancel with .@) [44]fit->SetLineColor(kRed);
root (cont'ed, cancel with .@) [45]fit->SetLineWidth(2);
root (cont'ed, cancel with .@) [46]fit->Draw("same");
root (cont'ed, cancel with .@) [47]
root (cont'ed, cancel with .@) [47]//
root (cont'ed, cancel with .@) [48]TLegend *leg = new TLegend(0.6, 0.7, 0.85, 0.85);
root (cont'ed, cancel with .@) [49]leg->AddEntry(h_signal, "Experimental Data", "PE");
root (cont'ed, cancel with .@) [50]leg->AddEntry(fit, "Landau Fit", "l");
root (cont'ed, cancel with .@) [51]leg->Draw("same");
root (cont'ed, cancel with .@) [52]
root (cont'ed, cancel with .@) [52]//
root (cont'ed, cancel with .@) [53]TLatex *tex = new TLatex();
root (cont'ed, cancel with .@) [54]tex->SetNDC(true);
root (cont'ed, cancel with .@) [55]tex->SetTextSize(0.04);
root (cont'ed, cancel with .@) [56]Double_t chi2_ndf = fit->GetChisquare() / fit->GetNDF();
root (cont'ed, cancel with .@) [57]tex->DrawLatex(0.2, 0.8, Form("#chi^{2}/ndf = %.2f", chi2_ndf));
root (cont'ed, cancel with .@) [58]tex->DrawLatex(0.2, 0.75, Form("MPV = %.1f ADC", fit->GetParameter(1)));
root (cont'ed, cancel with .@) [59]
root (cont'ed, cancel with .@) [59]// PDF
root (cont'ed, cancel with .@) [60]c->SaveAs("silicon_signal_fit.pdf");
root (cont'ed, cancel with .@) [61]printf(" PDFD\n");
root (cont'ed, cancel with .@) [62]

```

Info in <TCanvas::MakeDefCanvas>: created default TCanvas with name c1

\*\*\*\*\*

Minimizer is Minuit2 / Migrad

```

Chi2          =      7096.74
Ndf           =      186
Edm           =      1.02638e-05
NCalls        =      139
Constant      =      22511.9 +/- 106.061

```

```

root (cont'ed, cancel with .@) [40]h_signal->SetLineColor(kBlack);
root (cont'ed, cancel with .@) [41]h_signal->SetMarkerStyle(20);
root (cont'ed, cancel with .@) [42]h_signal->SetMarkerSize(0.7);
root (cont'ed, cancel with .@) [43]h_signal->Draw("PE");
root (cont'ed, cancel with .@) [44]
root (cont'ed, cancel with .@) [44]fit->SetLineColor(kRed);
root (cont'ed, cancel with .@) [45]fit->SetLineWidth(2);
root (cont'ed, cancel with .@) [46]fit->Draw("same");
root (cont'ed, cancel with .@) [47]
root (cont'ed, cancel with .@) [47]//
root (cont'ed, cancel with .@) [48]TLegend *leg = new TLegend(0.6, 0.7, 0.85, 0.85);
root (cont'ed, cancel with .@) [49]leg->AddEntry(h_signal, "Experimental Data", "PE");
root (cont'ed, cancel with .@) [50]leg->AddEntry(fit, "Landau Fit", "l");
root (cont'ed, cancel with .@) [51]leg->Draw("same");
root (cont'ed, cancel with .@) [52]
root (cont'ed, cancel with .@) [52]//
root (cont'ed, cancel with .@) [53]TLatex *tex = new TLatex();
root (cont'ed, cancel with .@) [54]tex->SetNDC(true);
root (cont'ed, cancel with .@) [55]tex->SetTextSize(0.04);
root (cont'ed, cancel with .@) [56]Double_t chi2_ndf = fit->GetChisquare() / fit->GetNDF();
root (cont'ed, cancel with .@) [57]tex->DrawLatex(0.2, 0.8, Form("#chi^{2}/ndf = %.2f", chi2_ndf));
root (cont'ed, cancel with .@) [58]tex->DrawLatex(0.2, 0.75, Form("MPV = %.1f ADC", fit->GetParameter(1)));
root (cont'ed, cancel with .@) [59]
root (cont'ed, cancel with .@) [59]// PDF
root (cont'ed, cancel with .@) [60]c->SaveAs("silicon_signal_fit.pdf");
root (cont'ed, cancel with .@) [61]printf(" PDFD\n");
root (cont'ed, cancel with .@) [62]}

```

```

Info in <TCanvas::MakeDefCanvas>: created default TCanvas with name c1
*****
Minimizer is Minuit2 / Migrad
Chi2          =          7096.74
Ndf           =           186
Edm           =    1.02638e-05
NCalls        =           139
Constant      =    22511.9    +/-    106.061
MPV           =     54.9127    +/-    0.0356738
Sigma         =     4.88441    +/-    0.0181844    (limited)
Info in <TCanvas::Print>: pdf file silicon_signal_fit.pdf has been created
PDFD
root [63] }

```

