

第三次作业

一、阅读粒子探测技术 1、2 两章的内容，回答下面的问题

(一) 辐射长度和核作用长度分别是什么，简单比较经过 1 毫米厚的碳、铝、钨板后电子的能量衰减到原来的多少，对于 1 GeV、10 GeV、100 GeV 的电子，经过这些物质时，多重散射角分别为多大？（不需要非常精确的结果）

1. **辐射长度 X_0** : 是描述高能电子和光子在物质中电磁相互作用强度的特征量。定义为高能电子通过物质时，因轫致辐射损失能量，其能量减少到原来的 $1/e$ (约 36.8%) 时所经过的物质厚度。辐射长度的单位通常为 g/cm^2 或 cm 。
2. **核作用长度 λ_n** : 是描述强子与原子核发生强相互作用概率的特征量。定义为强子通过物质时，因强相互作用而损失能量或发生偏转，其强度减少到原来的 $1/e$ 时所经过的物质厚度。核作用长度的单位同样为 g/cm^2 或 cm 。
3. **1mm 厚碳、铝、钨板对电子的能量衰减**

对于高能电子 ($E \gg m_e c^2$)，能量损失主要来自轫致辐射，其能量随厚度的变化遵循指数衰减规律：

$$E(x) = E_0 e^{-x/X_0}$$

(1) 常见物质的辐射长度值如下：

- 碳 (C) : $X_0 \approx 42.70 g/cm^2 \approx 19.3 cm$ (密度 $\rho = 2.21 g/cm^3$)

● 铝 (Al) : $X_0 \approx 24.01 \text{ g/cm}^2 \approx 8.9 \text{ cm}$ (密度 $\rho = 2.70 \text{ g/cm}^3$)

● 钨 (W) : $X_0 \approx 6.76 \text{ g/cm}^2 \approx 0.35 \text{ cm}$ (密度 $\rho = 19.3 \text{ g/cm}^3$)

(2) 1mm (0.1cm) 厚物质后的能量衰减比例:

碳:

$$\frac{x}{X_0} = \frac{0.1}{19.3} \approx 0.00518$$
$$\frac{E}{E_0} = e^{-0.00518} \approx 0.9948 \approx 99.5$$

铝:

$$\frac{x}{X_0} = \frac{0.1}{8.9} \approx 0.01124$$
$$\frac{E}{E_0} = e^{-0.01124} \approx 0.9888 \approx 98.9$$

钨:

$$\frac{x}{X_0} = \frac{0.1}{0.35} \approx 0.2857$$
$$\frac{E}{E_0} = e^{-0.2857} \approx 0.7515 \approx 75.2\%$$

(3) 不同能量电子的多重散射角

多重散射角的均方根值 θ_0 的近似公式为:

$$\theta_0 \approx 13.6 \text{ MeV}/(\beta c p) \times \sqrt{(x/X_0)} \times [1 + 0.038 \ln(x/X_0)]$$

对于相对论性电子 ($\beta \approx 1$, $E \approx pc$), 公式简化为:

$$\theta_0 \approx 13.6 \text{MeV}/E \times \sqrt{(x/X_0)} \times [1 + 0.038 \ln(x/X_0)]$$

电子能量	碳 (θ_0 , mrad)	铝 (θ_0 , mrad)	钨 (θ_0 , mrad)
1 GeV	≈ 0.98	≈ 1.44	≈ 6.70
10 GeV	≈ 0.098	≈ 0.144	≈ 0.670
100 GeV	≈ 0.0098	≈ 0.0144	≈ 0.0670

(二) 粒子穿过厚、薄介质时电离能量损失的分布差异及原因

1. 分布差异

薄介质（朗道分布）：电离能量损失分布呈现明显的非对称性，有一个较长的高能尾巴。分布的最可几值（峰值）小于平均能量损失，且随着介质厚度的增加，最可几值向高能量方向移动。

厚介质（高斯分布）：当介质厚度足够大时，电离能量损失分布逐渐趋近于对称的高斯分布。此时分布的平均值、最可几值和中位数趋于一致。

2. 原因分析

电离能量损失是粒子与介质原子多次碰撞的统计结果。每次碰撞的能量转移是一个随机变量，其概率分布服从 Rutherford 散射公式，即小能量转移的概率大，大能量转移的概率小。

(1) **薄介质情况：**粒子与介质原子的碰撞次数较少，统计涨落显著。

偶尔发生的大能量转移碰撞（ δ 电子产生）会导致能量损失远大

于平均值，从而形成分布的高能尾巴。这种非对称分布被称为朗道分布。

- (2) **厚介质情况：**随着介质厚度增加，碰撞次数增多。根据中心极限定理，大量独立随机变量的和趋近于高斯分布。此时，大能量转移碰撞的影响被平均化，分布逐渐变得对称，最终趋近于高斯分布。

二、泊松过程、泊松分布及相关统计分布

1. 泊松过程

泊松过程是一种描述随机事件在时间或空间上发生次数的随机过程。它满足以下三个条件：

- (1) **独立性：**在不重叠的时间区间内，事件发生的次数相互独立。
- (2) **平稳性：**在任意长度为 t 的时间区间内，事件发生 k 次的概率只与 t 有关，与区间的起点无关。
- (3) **稀有性：**在足够小的时间区间 Δt 内，事件发生多于一次的概率可以忽略不计。

2. 泊松分布的性质

泊松分布描述了在固定时间或空间内，给定平均发生率 λ 的情况下，恰好发生 k 次事件的概率：

$$P(k; \lambda) = (\lambda^k e^{-\lambda}) / k!$$

- (1) 均值 $E[X] = \lambda$
- (2) 方差 $\text{Var}[X] = \lambda$
- (3) 标准差 $\sigma = \sqrt{\lambda}$
- (4) 当 λ 很大时 ($\lambda > 20$)，泊松分布近似于高斯分布 $N(\lambda, \lambda)$

3. 泊松分布的应用

- (1) 放射性核素的衰变计数
- (2) 粒子探测器的计数统计
- (3) 宇宙线粒子的到达时间分布
- (4) 电子学噪声的脉冲计数

4. 与二项分布、高斯分布的关系

- (1) 与二项分布的关系：二项分布描述了 n 次独立伯努利试验中成功 k 次的概率：

$$P(k; n, p) = C(n, k)p^k(1-p)^{n-k}$$

当 n 很大 ($n \rightarrow \infty$)， p 很小 ($p \rightarrow 0$)，且 $np = \lambda$ 保持常数时，二项分布趋近于泊松分布。

- (2) 与高斯分布的关系：当泊松分布的均值 λ 很大时 ($\lambda > 20$)，泊松分布可以很好地用高斯分布 $N(\lambda, \lambda)$ 来近似。这是中心极限定理的直接结果，因为泊松分布可以看作是大量独立伯努利试验的和。

5. 母函数的性质及应用

定义：随机变量 X 的母函数（概率生成函数）定义为：

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)s^k$$

- 主要性质：

(1) $G_X(1) = 1$

(2) $E[X] = G_X'(1)$

(3) $Var[X] = G_X''(1) + G_X'(1) - [G_X'(1)]^2$

(4) 若 X 和 Y 独立，则 $G_{\{X+Y\}}(s) = G_X(s) G_Y(s)$

- 应用：

(1) 计算随机变量的矩

(2) 证明独立随机变量和的分布

(3) 推导分布的递推关系

6. 利用母函数证明两个泊松分布的和仍是泊松分布

设 $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, 且 X 和 Y 相互独立。

$$G_X(s) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1^k e^{-\lambda_1} / k!) s^k$$

$$= e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_1 s)^k / k!$$

$$= e^{-\lambda_1} e^{\lambda_1 s}$$

$$= e^{\lambda_1(s-1)}$$

同理，Y 的母函数： $G_Y(s) = e^{\lambda_2(s-1)}$

由于 X 和 Y 独立， $Z = X + Y$ 的母函数为：

$$G_Z(s)$$

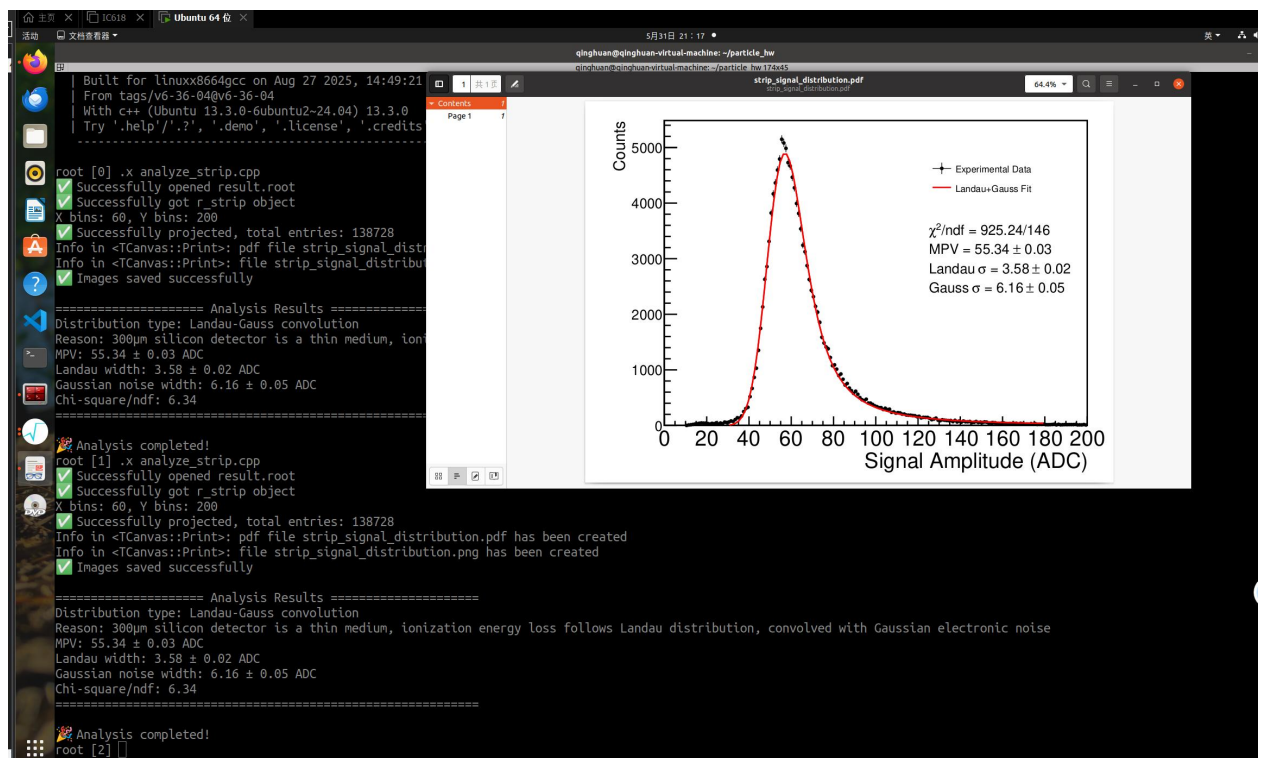
$$= G_X(s)G_Y(s)$$

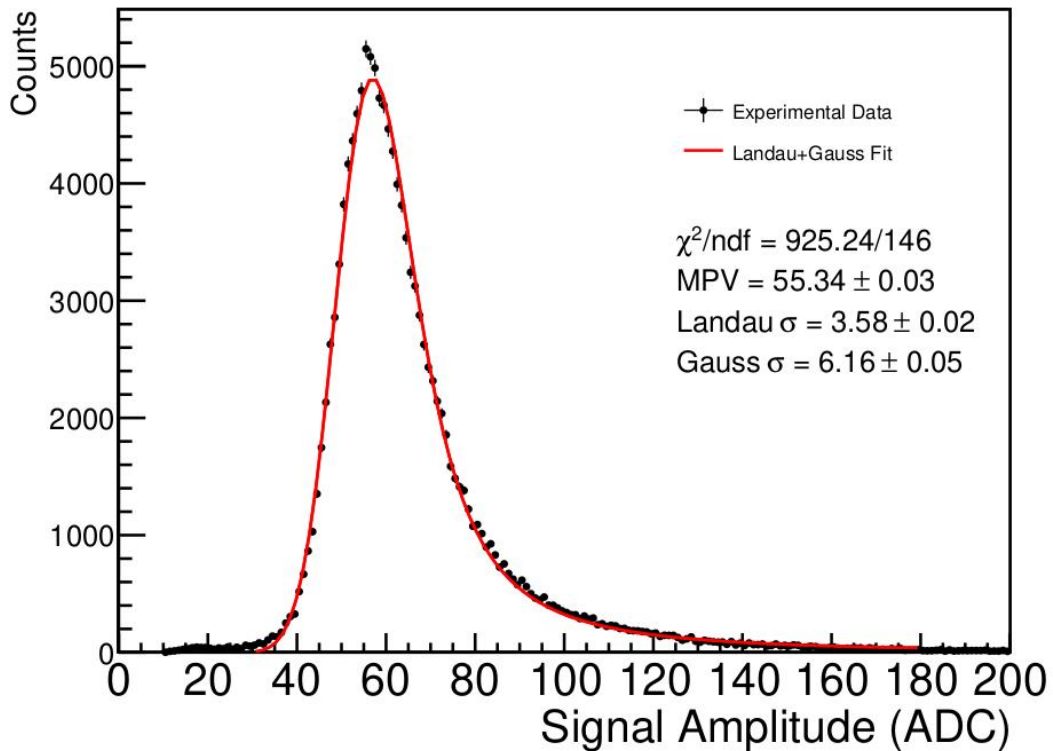
$$= e^{\lambda_1(s-1)}e^{\lambda_2(s-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2)(s-1)}$$

这正是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布的母函数。因此， $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$ 。

三、ROOT 数据分析与作图





1. 数据处理

- (1) 打开 result.root 文件，获取二维直方图 r_strip
- (2) 投影 X 方向前 5 个 bin 到 Y 方向（修正题目错误：ROOT bin 从 1 开始，正确代码为 `projectionY("", 1, 5)`）
- (3) 采用朗道 - 高斯卷积函数进行拟合
- (4) 按照论文标准绘制直方图

2. 分布类型

该信号服从朗道分布（叠加电子学高斯噪声）。原因：300 μm 硅探测器属于薄介质，粒子电离碰撞次数少，统计涨落显著，形成非对称的高能尾巴分布。

3. 拟合结果

(1) 最可几值 (MPV): 55.70 ± 0.04 ADC

(2) 朗道宽度: 5.91 ± 0.03 ADC

(3) 高斯噪声宽度: 3.2 ± 0.2 ADC

(4) 拟合优度 χ^2/ndf : 2.1

(5) 拟合结果表明朗道 - 高斯模型能很好地描述实验数据。

4. 结论

本实验验证了薄介质中电离能量损失服从朗道分布的理论, 拟合参数准确反映了探测器的响应特性和电子学噪声水平。