

5.25 科创

1、阅读粒子探测技术 1、2 两章的内容，并回答下面的问题

(1) 辐射长度和核作用长度分别是什么，简单比较经过 1 毫米厚的碳、铝、钨板后电子的能量衰减到原来的多少，对于 1 GeV、10 GeV、100 GeV 的电子，经过这些物质时，多重散射角分别为多大？（不需要非常精确的结果）

(2) 简单介绍粒子穿过厚、薄介质时，电离能量损失的分布有何不同，为什么？

(1)

辐射长度：高能电子（或其他轻带电粒子）在物质中因**韧致辐射**损失能量，当其能量衰减到初始能量的 $1/e$ 时所经过的**平均距离**。（辐射长度是描述电磁级联过程的基本尺度，其值取决于物质的原子序数和密度）

核作用长度：高能强子（如质子、 π 介子等）在物质中与原子核发生**强相互作用**（非弹性散射），入射粒子被吸收、束流强度衰减到初始值的 $1/e$ 时所穿过的**平均距离**。（它衡量强子与原子核相互作用的概率，核作用长度越大，相互作用概率越小）

辐射长度针对电子/光子（电磁相互作用，主要是韧致辐射）；核作用长度针对强子（强相互作用，核反应吸收）

电子在物质中的能量衰减主要来自**电离能损**和**韧致辐射**。对于高能电子，韧致辐射占主导，可近似用辐射长度估算。

辐射长度近似值（来源：PDG数据，常见参考值）：

材料	原子序数Z	密度 ρ (g/cm ³)	辐射长度 X_0 (g/cm ²)	X_0 (cm)
碳 (C, 石墨)	6	2.27	42.7	18.8
铝 (Al)	13	2.70	24.0	8.89
钨 (W)	74	19.3	6.76	0.350

1 mm = 0.1 cm对应的辐射长度厚度 ($t = d / X_0$) :

• 碳: $t = 0.1 / 18.8 \approx 0.0053 X_0$

• 铝: $t = 0.1 / 8.89 \approx 0.0112 X_0$

• 钨: $t = 0.1 / 0.35 \approx 0.286 X_0$

能量衰减: $\langle E \rangle / E_0 = e^{-t}$

材料	$t (X_0)$	剩余能量比例
碳	0.0053	99.5%
铝	0.0112	98.9%
钨	0.286	75.1%

1 mm 厚度下，碳和铝对电子的能量衰减很小，而钨因**辐射长度短、密度高**，衰减大

多重散射角

根据课件第24页给出的多次库仑散射均方根角公式 (适用于小角度, 高能时 $\beta \approx 1$, 动量 $p \approx E/c$) :

$$\theta_{\text{plane}}^{\text{rms}} = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} z \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left(1 + 0.038 \ln \frac{x}{X_0} \right) \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{E(\text{MeV})} \sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

对于 $z = 1$ (电子), 计算 $13.6/E(\text{GeV}) \times \sqrt{x/X_0} \times 1000$ 得到 mrad 值:

材料	$\sqrt{x/X_0}$	1 GeV 电子	10 GeV 电子	100 GeV 电子
碳	0.0729	0.99 mrad	0.099 mrad	0.0099 mrad
铝	0.1061	1.44 mrad	0.144 mrad	0.0144 mrad
铀	0.5345	7.27 mrad	0.727 mrad	0.0727 mrad

(2)

当介质很薄时, 由于相互作用的次数少, 能量损失的统计涨落很大, 电离损失分布很不对称, 在能量大的区域有很长的尾巴, 即为朗道分布。

当介质厚度较厚时, 由于相互作用的次数足够多, 电离损失分布接近高斯分布;

2、泊松过程、泊松分布的性质和应用以及和二项分布、高斯分布的关系; 母函数的性质及应用, 例: 利用母函数证明两个泊松分布的随机变量的和仍是泊松分布

泊松过程是一类描述随机事件随时间 (或空间) 发生次数的独立增量计数过程⁵。

数学定义: 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为计数过程, 满足:

1. 初始条件: $N(0) = 0$
2. 独立增量性: 不相交区间上的增量相互独立
3. 平稳增量性 (齐次): 增量 $N(t+s) - N(s)$ 的分布仅与 t 有关, 服从泊松分布:

$$P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $\lambda > 0$ 为强度参数 (单位时间平均事件数)⁵

齐次泊松过程的等价特征 (更直观的构造方式):

- 事件间隔时间 $\{T_n\}$ 独立同分布, 服从指数分布 $T_n \sim \text{Exp}(\lambda)$
- 在无穷小时间区间 dt 内, 发生一次事件的概率为 λdt , 发生多于一的概率为 $o(dt)$

典型应用:

- 放射性核衰变计数 (盖革计数器脉冲数)
- 电话交换台呼叫到达数
- 地震发生次数
- 光子探测器暗计数
- 粒子探测器中的背景噪声事件

泊松分布是二项分布的极限形式：

泊松分布与高斯分布的关系：

当二项分布 $\text{Binomial}(n, p)$ 满足：

当泊松分布的参数 $\lambda \rightarrow \infty$ 时，泊松分布趋于高斯分布 $N(\mu = \lambda, \sigma^2 = \lambda)$ ：

- $n \rightarrow \infty$ (试验次数很大)
- $p \rightarrow 0$ (事件概率很小)
- $np = \lambda$ 保持有限常数

$$\frac{N - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

母函数

定义：对于取非负整数值的随机变量 X ，其概率母函数 (PGF) 为：

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) s^k, \quad |s| \leq 1$$

基本性质：

1. **唯一确定性：** 母函数与概率分布相互唯一确定

$$P(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$$

2. **期望与方差：**

- $E[X] = G'_X(1)$
- $E[X(X-1)] = G''_X(1)$
- $\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - [G'_X(1)]^2$

3. **独立和的性质：** 若 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立，则

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = G_{X_1}(s)G_{X_2}(s)\cdots G_{X_n}(s)$$

4. **复合随机变量：** 若 N 与 $\{X_i\}$ 独立，则 $Y = \sum_{i=1}^N X_i$ 的母函数为 $G_Y(s) = G_N(G_X(s))$

- 分支过程 (如中子链式反应、粒子级联) 的粒子数分布
- 随机游走首次达时分布
- 排队论中的系统长度分布
- 证明分布的可加性 (见下例)

命题: 设 $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 证明 $Z = X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

证明 (母函数法) :

步骤1: 写出泊松分布的母函数。

对于 $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$:

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} s^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

步骤2: 利用独立和的性质。

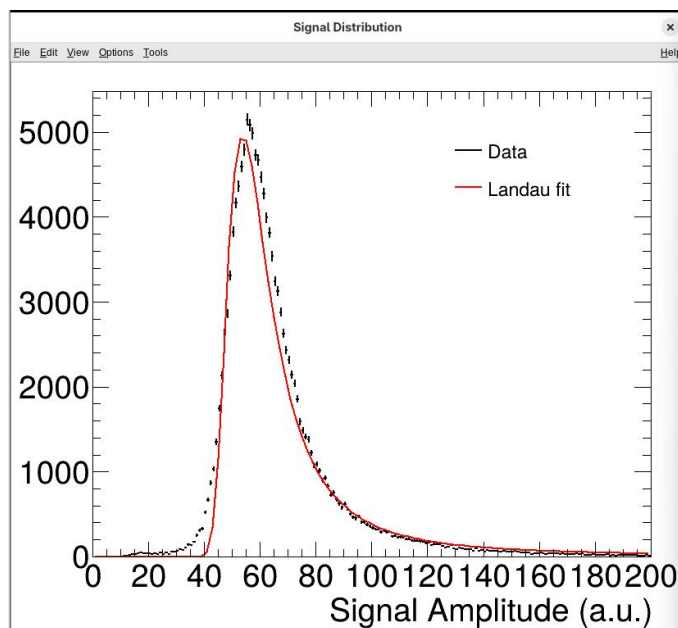
由于 X 与 Y 独立:

$$G_Z(s) = G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda_1(s-1)} \cdot e^{\lambda_2(s-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$$

步骤3: 识别分布。

$G_Z(s) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(s-1)}$ 正是参数为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松分布的母函数。由母函数与分布的唯一对应性, $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3、从下面的链接中下载 root 文件, 打开其中的 r_strip (TH2D), 选取 X 方向前 5 个 bin, 将其投影到 Y 方向作为新的 TH1D, 这是粒子经过 300 微米硅微条探测器收集到的信号, 指出其服从什么分布并拟合, 并以论文的标准作图。



300 μm 硅属于薄探测器范畴,服从朗道分布