

1、阅读粒子探测技术 1、2 两章的内容，并回答下面的问题

-辐射长度和核作用长度分别是什么，简单比较经过 1 毫米厚的碳、铝、钨板后电子的能量衰减到原来的多少，对于 1GeV、10GeV、100GeV 的电子，经过这些物质时，多重散射角分别为多大？（不需要非常精确的结果）-简单介绍粒子穿过厚、薄介质时，电离能量损失的分布有何不同，为什么？

问题 1: (1) 辐射长度 X_0

高能电子在介质中因**韧致辐射**损失能量，能量衰减至初始值 $1/e$ 对应的物质厚度；高能电子平均经过 1 个 X_0 厚度，能量 $E \rightarrow E/e$ ，也是电磁簇射纵向发展的特征长度；经验近似：

$$X_0 \approx \frac{716.4A}{Z(Z+1)\ln(287/\sqrt{Z})} \text{ g/cm}^2$$

(Z 越高, X_0 越小)

(2) 核相互作用长度 λ_I

强子与原子核发生非弹性核相互作用的平均自由程，描述强子核作用损失能量的特征厚度；电子几乎不发生强相互作用，因此电子能量损耗只由韧致 + 电离主导，不受 λ_I 影响； $\lambda_I \propto A^{1/3}$ ，重核 λ_I 更小。

查书得常用参数

物质	Z	A	X_0 [g/cm ²]	X_0/ρ [cm]	E_c [MeV]
碳	6	12.01	42.7	18.9	90
铝	13	26.98	24.0	8.9	40
钨	74	183.9	6.8	0.35	8.0

1mm 厚板材的电子能量衰减系数

高能电子韧致辐射能量衰减：

碳 (C): $x/X_0 = 0.1/19.4 \approx 0.00515$, $E/E_0 = e^{-0.00515} \approx 99.5\%$, 几乎无能量损失

铝 (Al): $x/X_0 = 0.1/8.9 \approx 0.0112$, $E/E_0 = e^{-0.0112} \approx 98.9\%$, 损耗很小

钨 (W): $x/X_0 = 0.1/0.35 \approx 0.2857$, $E/E_0 = e^{-0.2857} \approx 75.1\%$, 明显衰减

1GeV 及以上高能电子以韧致损耗为主，低能电子电离占比提升，但题目为 GeV 高能区间，只用辐射长度指数衰减估算。

多重库仑散射角（莫里哀经验公式，均方根散射角

$$\theta_{\text{rms}} \approx \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} \left[1 + 0.038 \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) \right] \text{ (rad)}$$

$$\beta \approx 1 (\text{GeV级电子}), p = E (\text{GeV}), x = 1 \text{ mm}$$

电子能量	C (碳)	Al (铝)	W (钨)
1 GeV	~0.3 mrad	~0.5 mrad	~1.5 mrad
10 GeV	~0.03 mrad	~0.05 mrad	~0.15 mrad
100 GeV	~0.003 mrad	~0.005 mrad	~0.015 mrad

核心规律：散射角与动量成反比，钨 Z 最高，同等厚度散射远大于碳、铝。

问题 2：薄介质、厚介质电离能损分布差异与成因

1. 薄层介质（厚度 x 远小于粒子射程，少量碰撞）：朗道 (Landau) 分布

分布特征：不对称长尾分布，峰值偏左，高能拖尾长；

物理原因：带电粒子在薄靶中碰撞次数少，单次碰撞存在 δ 电子（高能次级电子），少数事例会发生单次大能量转移，造成个别事例能量损失远大于最概然能损，形成高能长尾；统计涨落极强，无法趋近高斯。

2. 厚介质（厚度大、碰撞次数极多）：高斯（正态）分布

分布特征：对称钟型正态分布，均值 = 最概然能损；

物理原因：粒子穿过厚介质时发生上万次独立随机电离碰撞，依据中心极限定理，大量独立随机变量求和后，能损统计涨落被平均，单次大能量 δ 电子的影响被大量小能损事件抹平，分布收敛为高斯分布。

补充：中间厚度可过渡为 Vavilov 分布，介于朗道与高斯之间。

2、泊松过程、泊松分布的性质和应用以及和二项分布、高斯分布的关系；母函数的性质及应用，例：利用母函数证明两个泊松分布的随机变量的和仍是泊松分布。

(1) 泊松过程定义

独立时间/空间区间内，随机事例满足：

不重叠区间事例相互独立；

无穷小区间最多发生 1 次事例；

单位区间平均事例数 λ 为常数；对应计数服从泊松分布：

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(2) 核心性质

$$E[N] = D[N] = \lambda;$$

期望 = 方差；

可加性：独立泊松变量之和仍为泊松；

离散非负取值。

(3) 与二项、高斯分布关系

二项→泊松：二项分布 $B(n, p)$, $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0, np = \lambda$ 不

变时，二项极限为泊松；稀有事件计数（探测器少事例）常用泊松。

泊松→高斯：波数》20（高计数）时，泊松分布趋近正态分布 $N(\lambda, \lambda)$ ，大统计量探测器能谱用高斯拟合。

（4）应用场景

粒子探测器本底计数、放射性衰变计数、宇宙线事例计数、硅探测器单粒子信号计数。

2. 母函数证明两独立泊松变量之和仍泊松

① 泊松分布母函数

若 $X \sim P(\lambda_1)$, 母函数:

$$G_X(t) = E[t^X] = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\lambda_1^k e^{-\lambda_1}}{k!} = e^{\lambda_1(t-1)}$$

$Y \sim P(\lambda_2)$, 独立, $G_Y(t) = e^{\lambda_2(t-1)}$

② 和 $Z=X+Y$ 母函数

$$G_Z(t) = G_X(t) \cdot G_Y(t) = e^{\lambda_1(t-1)} \cdot e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)}$$

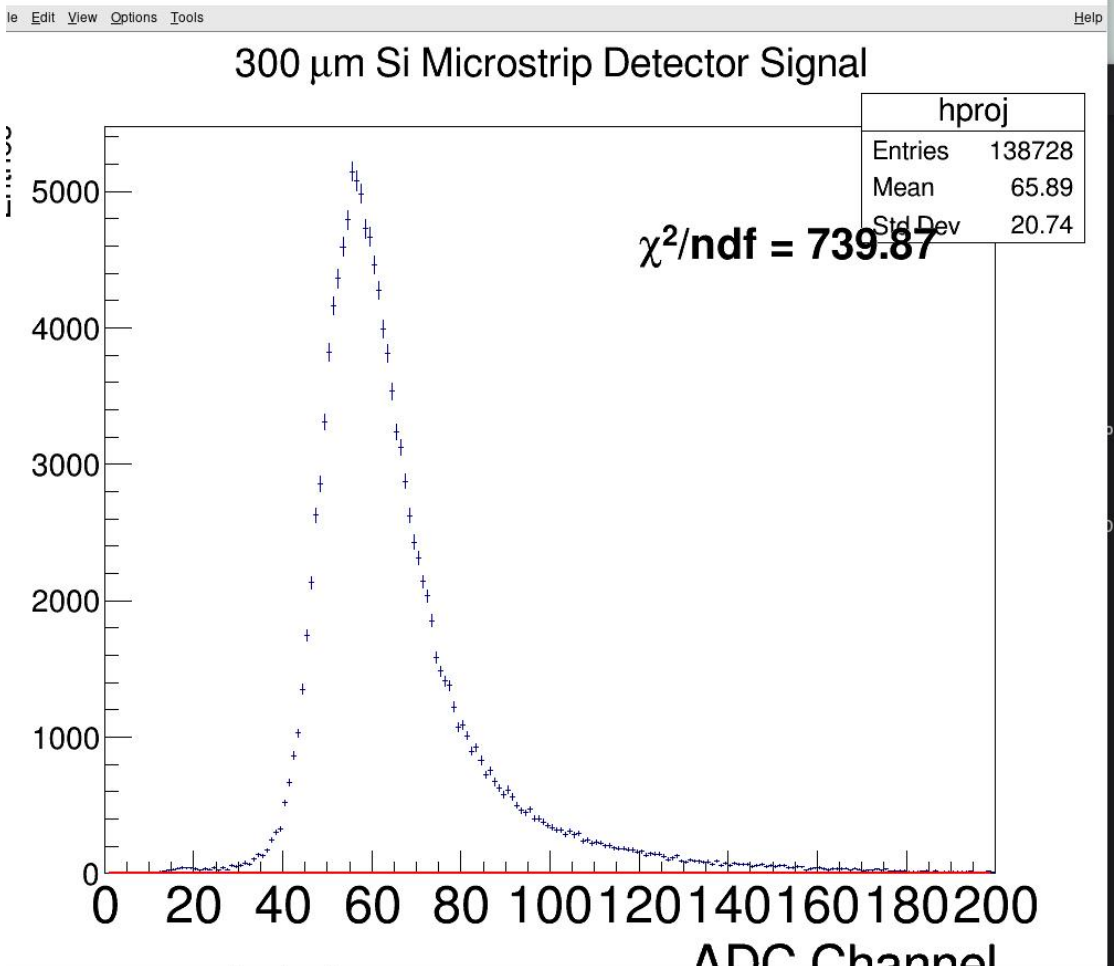
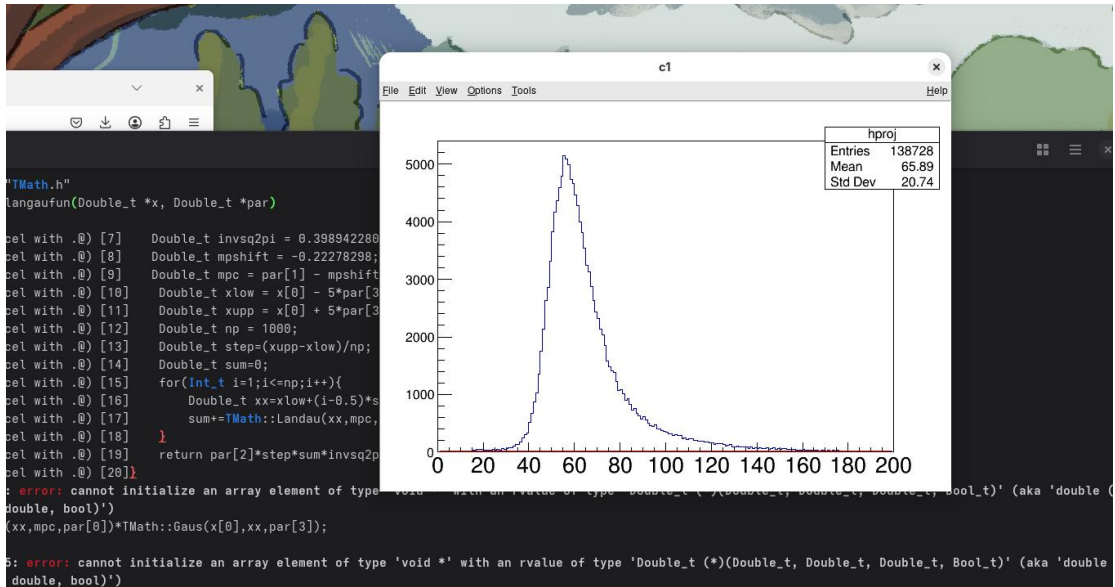
该形式是参数 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松母函数，因此 $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ ，可加性得证。

母函数通用应用

快速求随机变量期望、方差；

证明分布可加性、推导极限分布。

3、从下面的链接中下载 root 文件，打开其中的 rstrip (TH2D)，选取 X 方向前 5 个 bin，将其投影到 Y 方向作为新的 TH1D，这是粒子经过 300 微米硅微条探测器收集到的信号，指出其服从什么分布并拟合，并以论文的标准作图。



朗道 + 高斯复合拟合