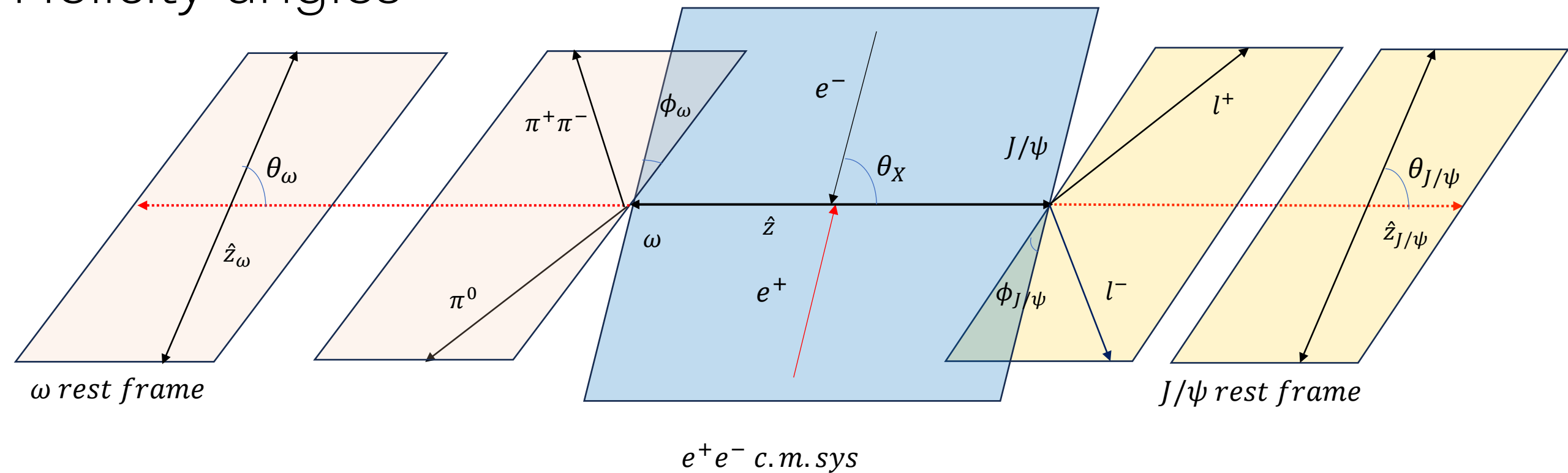


$\omega J/\psi$ Full amplitude analysis

Group meeting

2026/06/05

Helicity angles



- θ_X : e^+e^- 质心系下 J/ψ 与 z 轴的极角。
- $\phi_{J/\psi}(\phi_\omega)$: $J/\psi(\omega)$ 产生平面与衰变平面的夹角。
- $\theta_{J/\psi}$: J/ψ 质心系下 l 与 z 轴的极角。
- θ_ω : ω 质心系下衰变平面的法向量与 z 轴的夹角。

Physics model (pure angular)

根据 Jacob-Wick 螺旋度表象形式，衰变矩阵元（振幅）可以写为：

$$A_{M,\lambda_1,\lambda_2}^J(\theta, \phi) = F_{\lambda_1,\lambda_2}^J \cdot D_{M,\lambda}^{J*}(\phi, \theta, 0)$$

LS 表象到螺旋度表象的转换公式为：

$$F_{\lambda_1,\lambda_2}^J = \sum_{L,S} \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} \langle L, 0; S, \lambda | J, \lambda \rangle \langle S_1, \lambda_1; S_2, -\lambda_2 | S, \lambda \rangle \cdot g_{LS}^J$$

A. 相干叠加 (Coherent Summation)

如果中间存在**同一种初始态的不同衰变机制**（例如同一个 X 态通过不同的 LS 波分量衰变），或者**有多种性质相同的共振态干涉**，这些振幅必须在**几率幅层面**进行相干叠加，保留相位信息：

$$I_{\text{coherent}}(\theta, \phi) = \sum_M \left| \sum_j c_j \cdot A_{M,\lambda_1,\lambda_2}^{J,(j)}(\theta, \phi) \right|^2$$

B. 不相干叠加 (Incoherent Summation)

如果某些量子数在实验中**无法相干**，或者我们是在处理**信号与非共振本底 (Background) 的混合**，并且假设本底与信号没有量子干涉，则它们在**几率层面**进行不相干叠加：

$$I_{\text{total}}(\theta, \phi) = \sum_{M,\lambda_1,\lambda_2} \left| A_{M,\lambda_1,\lambda_2}^{\text{Signal}}(\theta, \phi) \right|^2 + I_{\text{bkg}}(\theta, \phi)$$

在纯角度分析中，最终的拟合概率密度函数 (PDF) 即为：

$$P(\theta, \phi) = \frac{I_{\text{total}}(\theta, \phi)\varepsilon(\theta, \phi)}{\int I_{\text{total}}(\theta, \phi)\varepsilon(\theta, \phi)d\theta d\phi}$$

Physics model (from angular to full amp)

根据 Jacob-Wick 螺旋度表象形式，衰变矩阵元（振幅）可以写为：

$$A_{M,\lambda_1,\lambda_2}^J(\theta, \phi) = F_{\lambda_1,\lambda_2}^J \cdot D_{M,\lambda}^{J*}(\phi, \theta, 0) \longrightarrow$$

$$\mathcal{T}(m) = \frac{M_0 \Gamma_0}{M_0^2 - m^2 - i M_0 \Gamma(m)}$$

其中：

- M_0 ：共振态的质量真值（待拟合参数）。
- Γ_0 ：共振态的固有衰变宽度（待拟合参数）。
- $\Gamma(m)$ ：**能量依赖的动态宽度 (Mass-dependent width)**。在远离阈值时常被近似为常数 Γ_0 ，但在 $X(3915) \rightarrow \omega J/\psi$ 这种接近产生阈值的道中，必须考虑其随能量的变化。

$$\Gamma(m) = \Gamma_0 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{2L+1} \left(\frac{M_0}{m} \right) \cdot \frac{B_L^2(q)}{B_L^2(q_0)}$$

在这个公式中，质量与角度通过轨道角动量 L 发生了隐式耦合：

- q ：在不变质量为 m 时，子体 ω （或 J/ψ ）在 X 静止系下的**相对动量（相空间因子）**。
- q_0 ：当 $m = M_0$ （处于共振峰顶）时的相对动量标定值。
- L ：衰变通道的**最低有效轨道角动量**（由上一节 LS 耦合的选择定则决定。例如 $0^+ \rightarrow \omega J/\psi$ 时 $L = 0$ ； $2^+ \rightarrow \omega J/\psi$ 时 $L = 0$ 或 2 ）。
- $B_L(q)$ ：Blatt-Weisskopf **离心势垒因子 (Barrier Factor)**。

$$A_{M,\lambda_1,\lambda_2}^{J,(j)}(m, \theta, \phi) = \mathcal{T}_j(m) \times \mathcal{M}_{M,\lambda_1,\lambda_2}^{J,(j)}(\theta, \phi)$$

其中：

- $\mathcal{M}_{M,\lambda_1,\lambda_2}^{J,(j)}(\theta, \phi) = F_{\lambda_1,\lambda_2}^J \cdot D_{M,\lambda}^{J*}(\phi, \theta, 0)$ 依旧是上一阶段推导的**螺旋度空间几何项**。
- $\mathcal{T}_j(m)$ 就是新引入的**传递振幅 (Propagator / Lineshape)**，它决定了信号在不变质量谱上的谱形状。

Physics model (from angular to full amp)

1. 振幅的 LS 质量依赖参数化

为了将质量依赖正确地注入到每一个轨道角动量波分量 (Partial Wave) 中, 我们将特定 J^P 状态的总衰变振幅改写为在 LS 空间中的求和:

$$A_{M,\lambda_1,\lambda_2}^J(m, \theta, \phi) = \mathcal{T}(m) \cdot \sum_{L,S} \psi_{LS} \cdot G_{LS}^{\lambda_1,\lambda_2}(\theta, \phi) \cdot \mathcal{F}_L(m)$$

其中, 公式被拆解为四个核心部分:

- 1 $\mathcal{T}(m)$ (**整体线型**): 共振态的相对论 Breit-Wigner 传递子 (不含屏障因子部分)。
- 2 ψ_{LS} (**拟合复常数**): LS 表象下的耦合系数。在实际拟合中, 我们通常采用直角坐标 (Cartesian Coordinates) 将其参数化为:

$$\psi_{LS} = x_{LS} + iy_{LS}$$

其中 x_{LS} 和 y_{LS} 是由数据拟合决定的实数。

- 3 $G_{LS}^{\lambda_1,\lambda_2}(\theta, \phi)$ (**空间几何角分布项**): 将 Wigner D 矩阵与 Clebsch-Gordan 系数结合的纯角度纯几何项。
- 4 $\mathcal{F}_L(m)$ (**轨道角动量特异性质量依赖项**): 这是本阶段的核心引入项。

$$\mathcal{F}_L(m) = \left(\frac{q}{M_0} \right)^L \cdot B_L(q)$$

其中:

- q 依然是在当前质量 m 下, 子体在共振态静止系下的相对动量:

$$q = \frac{\sqrt{[m^2 - (m_\omega + m_{J/\psi})^2][m^2 - (m_\omega - m_{J/\psi})^2]}}{2m}$$

- $\left(\frac{q}{M_0} \right)^L$ 是**离心力因子 (Centrifugal barrier factor)**, 用于描述当相对动量趋于 0 (即在阈值 $m \rightarrow m_\omega + m_{J/\psi}$ 处) 时, 高阶分波 ($L > 0$) 由于角动量排斥导致的强度压低。
- $B_L(q)$ 是随动量变化的 **Blatt-Weisskopf 势垒因子** (形式如上一阶段推导, 如 $B_0 = 1$, $B_2 = \sqrt{13/[9 + 3(qR)^2 + (qR)^4]}$), 用于在高动量区遏制 q^L 的发散。

Physics model (from angular to full amp)

1. 振幅的 LS 质量依赖参数化

为了将质量依赖正确地注入到每一个轨道角动量波分量 (Partial Wave) 中, 我们将特定 J^P 状态的总衰变振幅改写为在 LS 空间中的求和:

$$A_{M,\lambda_1,\lambda_2}^J(m, \theta, \phi) = \mathcal{T}(m) \cdot \sum_{L,S} \psi_{LS} \cdot G_{LS}^{\lambda_1,\lambda_2}(\theta, \phi) \cdot \mathcal{F}_L(m)$$

其中, 公式被拆解为四个核心部分:

- 1 $\mathcal{T}(m)$ (**整体线型**): 共振态的相对论 Breit-Wigner 传递子 (不含屏障因子部分)。
- 2 ψ_{LS} (**拟合复常数**): LS 表象下的耦合系数。在实际拟合中, 我们通常采用直角坐标 (Cartesian Coordinates) 将其参数化为:

$$\psi_{LS} = x_{LS} + iy_{LS}$$

其中 x_{LS} 和 y_{LS} 是由数据拟合决定的实数。

- 3 $G_{LS}^{\lambda_1,\lambda_2}(\theta, \phi)$ (**空间几何角分布项**): 将 Wigner D 矩阵与 Clebsch-Gordan 系数结合的纯角度纯几何项。
- 4 $\mathcal{F}_L(m)$ (**轨道角动量特异性质量依赖项**): 这是本阶段的核心引入项。

$$\mathcal{F}_L(m) = \left(\frac{q}{M_0} \right)^L \cdot B_L(q)$$

其中:

- q 依然是在当前质量 m 下, 子体在共振态静止系下的相对动量:

$$q = \frac{\sqrt{[m^2 - (m_\omega + m_{J/\psi})^2][m^2 - (m_\omega - m_{J/\psi})^2]}}{2m}$$

- $\left(\frac{q}{M_0} \right)^L$ 是**离心力因子 (Centrifugal barrier factor)**, 用于描述当相对动量趋于 0 (即在阈值 $m \rightarrow m_\omega + m_{J/\psi}$ 处) 时, 高阶分波 ($L > 0$) 由于角动量排斥导致的强度压低。
- $B_L(q)$ 是随动量变化的 **Blatt-Weisskopf 势垒因子** (形式如上一阶段推导, 如 $B_0 = 1$, $B_2 = \sqrt{13/[9 + 3(qR)^2 + (qR)^4]}$), 用于在高动量区遏制 q^L 的发散。

Physics model (from angular to full amp)

$$\mathcal{U}_{LS}^{(j),M,\lambda_1,\lambda_2}(m,\theta,\phi) \equiv \mathcal{T}_j(m) \cdot \left(\frac{q}{M_0^{(j)}}\right)^L B_L(q) \cdot G_{LS}^{(j),\lambda_1,\lambda_2}(\theta,\phi)$$

由此，总振幅可以简写为拟合系数 $\psi_{LS}^{(j)}$ 与已知时空物理函数 \mathcal{U} 的线性组合：

$$\mathcal{A}_{M,\lambda_1,\lambda_2}(m,\theta,\phi) = \sum_j \sum_{L,S} \psi_{LS}^{(j)} \cdot \mathcal{U}_{LS}^{(j),M,\lambda_1,\lambda_2}(m,\theta,\phi)$$

2. 全振幅微分截面展开（模平方）

我们在实验室测量的微分衰变率 $I(m,\theta,\phi)$ ，需要对末态所有无法观测的极化状态（螺旋度 λ_1, λ_2 ）以及初始态的自旋投影 M 进行**不相干求和**，而对内部的物理波分量进行**相干叠加**：

$$I(m,\theta,\phi) = \sum_{M,\lambda_1,\lambda_2} \left| \sum_j \sum_{L,S} \psi_{LS}^{(j)} \cdot \mathcal{U}_{LS}^{(j),M,\lambda_1,\lambda_2}(m,\theta,\phi) \right|^2$$

因此，我们通常将相对论 Breit-Wigner 中的分母部分（质量 M_0 和**标定宽度** Γ_0 ）在所有分波间**强制共用**：

$$\mathcal{T}_{LS}(m) \rightarrow \mathcal{T}(m) = \frac{M_0 \Gamma_0}{M_0^2 - m^2 - i M_0 \Gamma_{\text{total}}(m)}$$

此时，总动态宽度 $\Gamma_{\text{total}}(m)$ 变成了所有允许分波动态宽度之和（按分支比加权），或者近似由占据绝对主导的低阶分波（如 S 波）来决定。这样，**最难拟合的复数分母项就被完全提到了分波求和号的外面**。

2. 因子化后的全振幅展开（极大简化版）

当整体线型 $\mathcal{T}(m)$ 被提取出来后，微分截面的展开式可以得到极大的瘦身。总振幅重写为：

$$\mathcal{A}_{M,\lambda_1,\lambda_2}(m,\theta,\phi) = \mathcal{T}(m) \cdot \sum_{L,S} \psi_{LS} \cdot \left[\left(\frac{q}{M_0}\right)^L B_L(q) \cdot G_{LS}^{\lambda_1,\lambda_2}(\theta,\phi) \right]$$

Real fit 0+

- 对于 S 波 ($L = 0$):

$$\mathcal{F}_0(m) = 1 \cdot 1 = 1$$

- 对于 D 波 ($L = 2$):

$$\mathcal{F}_2(m) = \left(\frac{q}{M_0}\right)^2 \cdot B_2(q)$$

$X(3915)$ 的质量 $M_0 \approx 3.918$ GeV。而未态粒子的质量分别为 $m_\omega \approx 0.782$ GeV, $m_{J/\psi} \approx 3.097$ GeV。

系统的产生阈值 (Threshold) 为:

$$m_{\text{th}} = m_\omega + m_{J/\psi} \approx 3.879 \text{ GeV}$$

这意味着, 整个 $X(3915)$ 的共振峰谱区, 距离阈值只有区区 $30 \sim 40$ MeV 的窗口。在如此靠近阈值的地方, 子体的相对动量 q 极其微小。

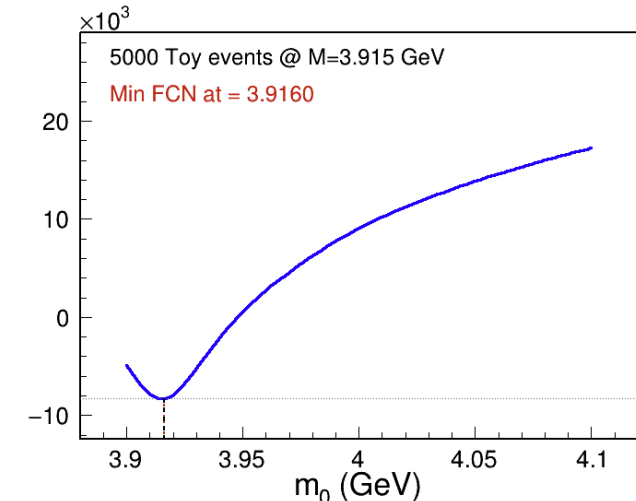
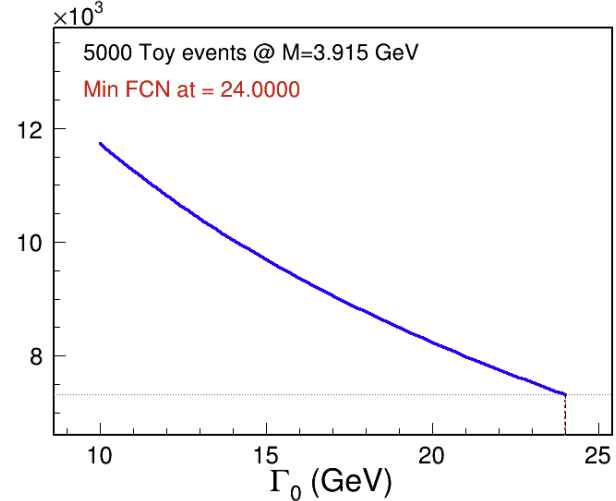
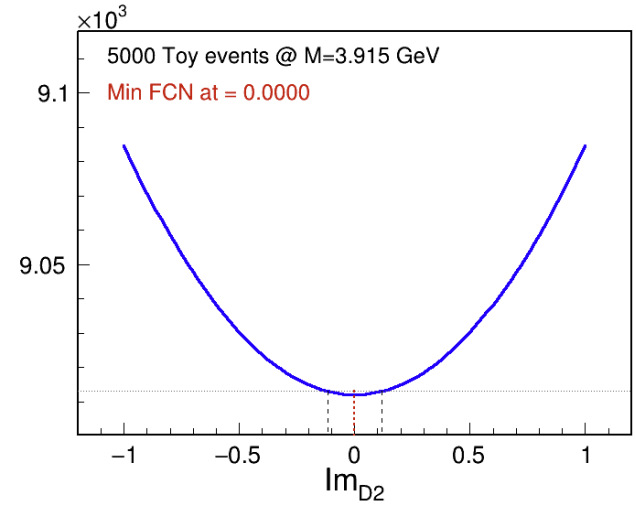
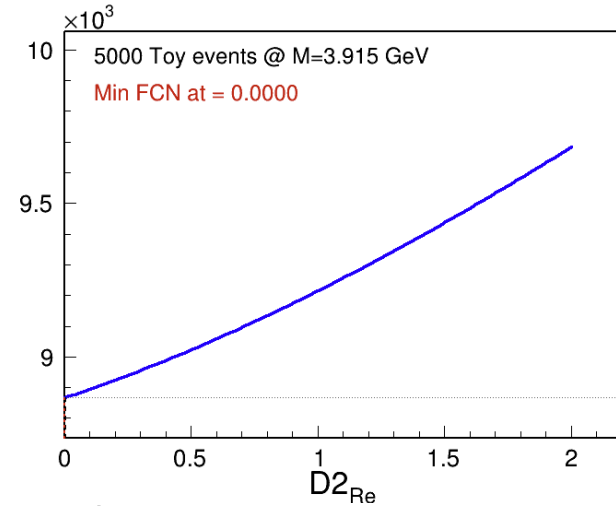
如果我们去计算峰顶处的相对动量 q_0 :

$$q_0 \approx 200 \text{ MeV} \approx 0.2 \text{ GeV}$$

代入 $\mathcal{F}_2(m)$ 的离心力项:

$$\left(\frac{q_0}{M_0}\right)^2 \approx \left(\frac{0.2}{3.918}\right)^2 \approx (0.05)^2 = 0.0025$$

```
double m0 = 3.915;  
double g0 = 0.017;  
double d_hadron = 3.70;  
int L_denominator = 0;  
  
std::complex<double> S0(1.0, 0.0);  
std::complex<double> D2(0.6, 0.8);
```



Real fit check 0+

```
double m0 = 3.915;  
double g0 = 0.017;  
double d_hadron = 3.70;  
int L_denominator = 0;  
  
std::complex<double> S0(1.0, 0.0);  
std::complex<double> D2(0.6, 0.8);
```

虚部一阶线性项系数 (y 的系数): 0.

