Hypergeometric function representation of Feynman integral

费曼积分的超几何函数表示

Tai-Fu Feng，Hai-Bin Zhang (speaker) et al.

Hebei University, Baoding

第六届量子场论及其应用研讨会

济南，2026.10.17

CONTENTS

研究背景| 费曼圈图计算

Background: Feynman Loop Calculations

核心思想| 超几何函数表示

Core Thought: Hypergeometric Function Representation

理论探索| 从单双圈到多圈的解析求解

Theoretical Discovery: Analytical Solutions from one/two Loops to Multi-Loops

成果与展望| 效率验证

Achievements & Outlook: Efficiency Verification

01

研究背景：费曼圈图计算

RESEARCH BACKGROUND: FEYNMAN LOOP CALCULATIONS



费曼圈图：理论物理的核心工具

核心数学工具

费曼圈图是量子场论中描述和计算基本粒子相互作用过程的关键语言。

实验精度驱动

随着LHC等高能物理实验测量精度的提高，对理论预言的精度要求日益严苛。

高精度计算需求

要获得高精度预言，必须对多圈费曼图进行精确的解析或大规模数值计算。

关键研究方向

发展高效、精确的费曼圈图计算方法，是量子场论领域的核心课题。



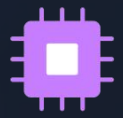
Quantum Field Theory

传统方法的瓶颈：计算复杂度的指数级增长



解析计算困难

传统的参数化方法在处理多圈图时，会导致极其复杂的多重积分，难以获得解析解。



数值计算耗时耗CPU

数值计算方法虽通用，但在处理多圈多标度问题时速度慢、效率低，对CPU与内存要求高，难以满足大规模计算需求。



研究进展缓慢

近四十年来，多圈多标度费曼图标量积分的解析计算方法进展缓慢，成为了该领域发展的关键瓶颈。

02

核心思想：超几何函数表示

Core Thought: Hypergeometric Function Representation



一条新路径：超几何函数表示

核心思想：将复杂的费曼积分，通过一系列数学变换，转化为以超几何函数表示的解析表达式。

超几何函数

高斯函数（单变量） $${}_2F_1(a, b; c \mid x) = \Sigma\, (a)_n\, (b)_n / [n!\, (c)_n] \cdot x^n, \quad |x| < 1$$

第一类 Appell 函数 $$F_1(a; b_1, b_2; c \mid x, y) = \Sigma\, (a)_{m+n}\, (b_1)_m\, (b_2)_n / [m!\, n!\, (c)_{m+n}] \cdot x^m\, y^n$$

Lauricella F_B（三变量） $$F_B(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c \mid x_1, x_2, x_3), \quad |x_1|+|x_2|+|x_3| < 1$$

Pochhammer 记号 $$(a)_n = \Gamma(a + n) / \Gamma(a)$$

针对费曼积分，超几何函数表示下一个变量对应一个标度，即内线质量平方或与外线动量平方的比值。

超几何函数表示的优点

核心思想： 费曼积分表示为以超几何函数表示的解析表达式。（单变量的高斯函数、双变量的阿佩尔函数）

解析性（Analyticity）

在收敛区间获得精确解析解，形式简洁优雅，易于验证推导过程。

高效性（Efficiency）

基于解析表达式编写的计算程序，运算速度显著优于传统数值算法。

普适性（Universality）

展现强大适应性，能够处理从单圈到多圈的复杂费曼图计算。

该方法为费曼圈图解析计算提供了全新的数学方法。

03

理论探索：从单双圈到多圈的解析求解

THEORETICAL DISCOVERY: ANALYTICAL SOLUTIONS FROM ONE/TWO LOOP TO MULTI-LOOP

第一阶段：单双圈基础级数解 (2018-2019)

研究对象

聚焦单圈 B0、C0 函数，以及双圈真空图与日落图等费曼积分。

主要成果

- 通过贝塞尔函数、盖根保尔多项式等变换，给出了费曼积分的超几何函数表示形式。
- 推导出 **0 点邻域**收敛区间内的精确解析级数解。
- 建立了这些解所满足的齐次线性偏微分方程组。

发表期刊

《Nuclear Physics B》 (2018, 2019)

第二阶段：解析延拓与混合算法 (2020-2023)

核心挑战

如何将0点邻域的解解析延拓到其他区域？这是连接局部解与全局解的关键。

创新方法

提出**Mellin-Barnes表示及Miller变换的混合算法**，突破传统延拓限制，实现了高效计算。

关键成果

建立**普通流形上的GKZ方程组（完备的）**；通过三角剖分，求解出**0点与∞点邻域的基础解系**，覆盖了核心参数空间。

以带质量四传播子双圈自能图为例，成功解出536个超几何解析解，给出0点与∞点邻域的基础解系。

发表期刊：《Nuclear Physics B》(2020)，《European Physical Journal C》(2023)

第三阶段：Grassmannian流形的引入 (2022)

核心挑战

在复杂的费曼积分体系中，**如何高效求解所有奇点邻域的基础解系**是一个关键难题。

创新突破

突破性地将**Grassmannian流形几何理论引入**费曼积分表示体系，建立全新的几何求解视角。

关键成果

将费曼积分在射影空间齐次化，构建了Grassmannian流形上的GKZ超几何方程组框架，通过组合学方法成功解析求解出**所有奇点邻域的基础解系**。

发表期刊：Physical Review D (2022)

将费曼积分解析计算问题，转化为组合学与代数几何问题求解。

第四阶段：全区域解析延拓 (2025)

核心目标

探索如何高效地将局部解析解延拓到整个数学定义域？

创新方法

提出通用延拓框架，通过拓展超几何函数的**三类高斯关系**（高斯倒数关系、高斯库默关系、高斯比邻关系）完成拼接。

关键成果

实现解析解的全区域解析延拓；可推导D=4邻域洛朗级数，为物理应用提供关键支撑。

发表期刊

Physical Review D (2025)

通过超几何函数关系的巧妙运用，来实现从局部解到全区域解

多重对数与超几何函数

基本的关系

对数 $\mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x) = x \cdot {}_2F_1(1, 1; 2; x)$

双对数 $\mathrm{Li}_2(x) = x \cdot {}_3F_2(1, 1, 1; 2, 2; x)$

三类高斯关系

双对数恒等式

高斯倒数关系（Mellin-Barnes 围道）

$x \to 1/x$：连接两个连通分支（实恒等式取 $x < 0$）

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1/x) = -\pi^2/6 - \tfrac{1}{2}\ln^2(-x)$$

高斯库默关系

$x \to 1-x$，$x \to x/(x-1)$：延拓到整个定义域

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = \pi^2/6 - \ln x \cdot \ln(1-x)$$

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(x/(x-1)) = -\tfrac{1}{2}\ln^2(1-x)$$

高斯比邻关系（参数 ±1，依赖拟阵）

把权 n 降到权 $n-1$

$$\mathrm{Li}_2(x)' = \mathrm{Li}_1(x)/x$$

超几何函数表示是比多重对数更大的语言：$\mathrm{Li}_n(x) = x \cdot {}_{n+1}F_n(1, \ldots, 1; 2, \ldots, 2; x)$。

现阶段：多圈费曼积分的研究 (2023-今)

核心验证

验证超几何函数表示是否适用于复杂的**多圈费曼图计算**。

研究对象

聚焦于**三圈及四圈真空图**解析计算。

关键成果

应用于多圈真空图，给出了普通流形上的GKZ超几何偏微分方程组及基础解系。

发表期刊

Journal of High Energy Physics

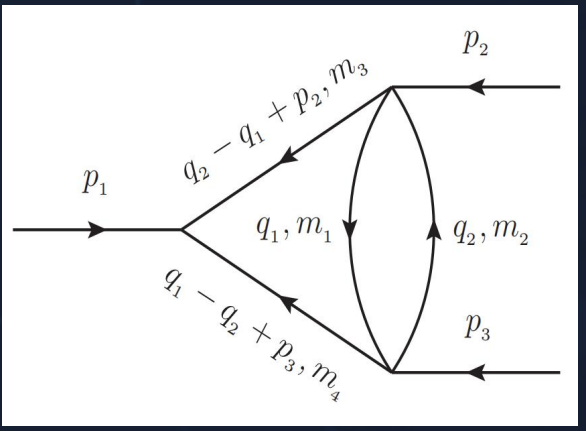
(2023, 2025)

标志着超几何函数表示在多圈计算领域的具有可推广性。

现阶段：多标度费曼积分的计算 (2024-今)

研究对象

含质量的双圈沙丘图（4个内线质量、三个外动量）



主要成果

- 含质量双圈沙丘图的费曼积分可以嵌入在**格拉斯曼流形 $G_{5,8}$**
- 通过几何构型，超几何函数解被归结为**十种类型**
- 超几何函数可以通过**高斯关系**相互转换

04

成果与展望：效率验证

ACHIEVEMENTS AND PROSPECTS: EFFICIENCY VERIFICATION



计算效率的飞跃：解析 vs 数值

对比对象

将基于超几何函数表示的解析程序与国际广泛使用的传统数值程序FIESTA进行性能实测对比。

核心结论

解析方法展现出压倒性效率优势，显著降低计算耗时，为大规模、高精度的物理计算提供了关键工具。



系列代表性成果：8篇期刊论文

Evaluating Feynman integrals by the hypergeometry
Nuclear Physics B 927 (2018)

The system of partial differential equations for the C0 function
Nuclear Physics B 940 (2019)

GKZ-hypergeometric systems for Feynman integrals
Nuclear Physics B 953 (2020)

Feynman integrals of Grassmannians
Physical Review D 106 (2022)

GKZ-system of the 2-loop self energy with 4 propagators
European Physical Journal C 83 (2023)

GKZ hypergeometric systems of the three-loop vacuum Feynman integrals
Journal of High Energy Physics 05 (2023)

Gauss Relations in Feynman Integrals
Physical Review D 111 (2025)

GKZ hypergeometric systems of the four-loop vacuum Feynman integrals
Journal of High Energy Physics 03 (2025)

成果：系列论文涵盖从方法提出到多圈应用，发表于 JHEP, PRD, EPJC, NPB 等本领域专业期刊。

未来展望



深入多圈多标度

继续深入研究更复杂的多圈多标度费曼图的解析计算，突破现有计算瓶颈。



开发高效程序

基于取得的成果，开发更完善、更高效的计算程序包，以期服务于高能物理研究。

河北省量子场论精细计算与应用重点实验室
河北省计算物理基础学科研究中心
河北大学物理科学与技术学院 张海斌

THANKS