分波分析（Partial Wave Analysis）简介

严薛强（复旦大学）
yanxueqiang@ihep.ac.cn

2026年Belle II 中国组冬季学校

目录

一、背景介绍

二、螺旋度振幅形式

三、数据的极大似然拟合

四、分波分析策略

五、误差估计

六、TFPWA工具介绍



背景介绍

分波分析背景：

I.实验上从复杂的多体末态中提取中间共振态信息，但共振态间可能存在着相互叠加、干涉的效应，对实验研究造成了困难。为了精确研究中间共振态的参数与产生衰变性质，不仅需要高统计量数据样本，还需要强有力的分析方法。

II. 有别于一维不变质量谱的拟合，分波分析通过构造分波振幅，直接拟合末态粒子四动量，确定微分截面的参数，更全面地考虑了共振态之间的叠加与干涉效应。可以在多体末态中搜寻中间共振态，并且测量它们的自旋宇称、质量宽度和分支比。

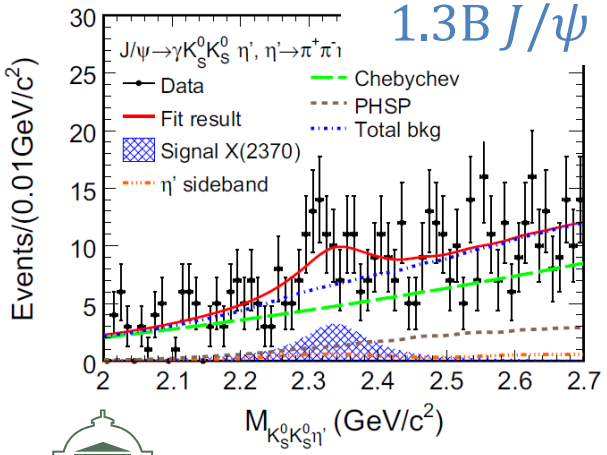
III.多体衰变过程的模型构建难度较高，且在数据分析过程中，涉及多维分布，对算力要求高，导致耗时过长。这些因素极大的限制了对多体衰变过程的理解。

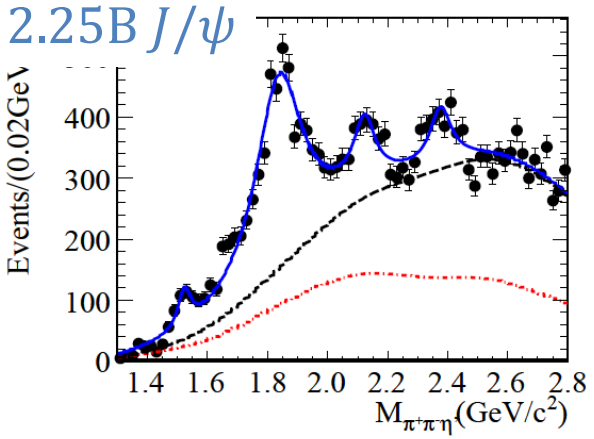
核心目标：从实验数据中提取共振态的质量、宽度、J^P、分支比。

背景介绍

一维不变质量谱拟合

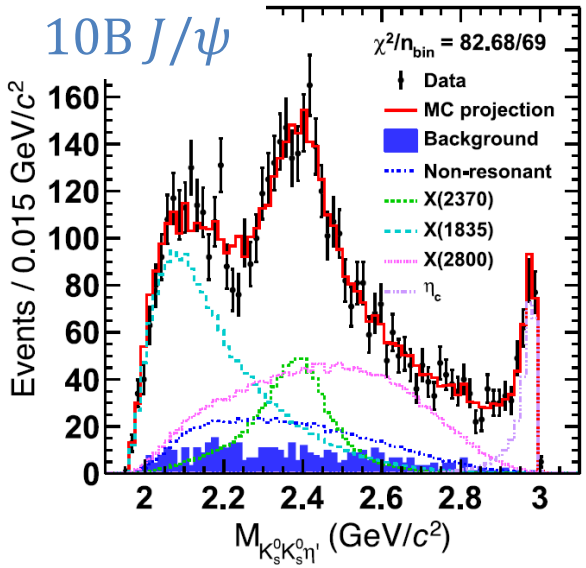
- 只使用单一质量谱投影信息，丢失其余维度的信息
- 忽略了不同成分之间的干涉效应，拟合得到的结果不等于真实贡献
- 往往无法直接确定共振态自旋宇称
- 质量区间重叠的共振态之间难以区分





分波分析

- 基于末态的四动量数据，更充分地利用相空间信息
- 相干求和，更全面地考虑不同成分之间的干涉效应
- 可直接测量粒子的自旋宇称信息
- 可借助角分布区分重叠的共振态



背景介绍

广泛的应用领域：

I.轻强子谱学：标量胶球候选者的甄别（$J/\psi \to \gamma\pi^0\pi^0$、$\gamma\eta\eta$、$\gamma K_S^0 K_S^0$、$\gamma\phi\phi$、$\gamma\omega\omega$），$\eta(1405)/\eta(1475)$的研究

II.（类）粲偶素：$Z_c(3900)$自旋宇称的确定

III.奇特强子态：五夸克态候选态$P_c(4380)^+$、$P_c(4450)^+$的发现， $X(2370)$自旋宇称的测量，$\eta_1(1855)$的发现

IV.粲重子衰变：$\Lambda_c^+ \to \Lambda\pi^+\pi^0$、$\Lambda_c^+ \to \Lambda\pi^+\eta$

V. B物理、τ轻子衰变、双光子散射……



螺旋度振幅形式

分波分析一般将振幅的角分布依赖部分与能量依赖的动力学部分拆开。角分布与粒子的自旋宇称有关，可以使用两种等价的方法进行描述，协变张量形式与螺旋度形式。分波振幅的能量依赖部分体现了共振态的动力学性质，参数化一般采用势垒因子与共振态的Breit-Wigner函数。

螺旋度振幅形式：

螺旋度（λ）：在动量方向上的自旋投影

初态：$|\lambda_0, p_0^\mu\rangle$；末态：$|\lambda_1, p_1^\mu; \lambda_2, p_2^\mu; \dots\rangle = |\lambda_1, p_1^\mu\rangle \otimes |\lambda_2, p_2^\mu\rangle \otimes \dots$

两体衰变振幅：$0 \to 1 + 2$

$$H^{0\to 1+2}_{\lambda_1,\lambda_2} = \left\langle \lambda_1, p_1^\mu; -\lambda_2, p_2^\mu \,|U|\, \lambda_0', p_0'^\mu \right\rangle$$

螺旋度振幅形式

$$H^{0\to 1+2}_{\lambda_1,\lambda_2} = \left\langle \lambda_1, p_1^{\mu}; -\lambda_2, p_2^{\mu} \left| U \right| \lambda_0', p_0'^{\mu} \right\rangle$$

洛伦兹变化

$$\left|\lambda_0, p_0^{\mu}\right\rangle = R^{-1}\left|\lambda_0', p_0'^{\mu}\right\rangle = \sum_{\lambda_0'} \left|\lambda_0', p_0'^{\mu}\right\rangle \left\langle \lambda_0', p_0'^{\mu} \left| R^{-1} \right| \lambda_0, p_0^{\mu} \right\rangle = \sum_{\lambda_0'} D^{J_0*}_{\lambda_0,\lambda_0'}(\phi,\theta,0) \left|\lambda_0', p_0'^{\mu}\right\rangle$$

Wigner-D函数：$D^{J_0*}_{\lambda_0,\lambda_0'}(\phi,\theta,0)$

旋转算符的$2J_0+1$维矩阵表示的矩阵元，反映了角分布依赖部分

螺旋度振幅：所有粒子的自旋投影都定义在了粒子1的动量方向上

$$A^{0\to 1+2}_{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2} = \left\langle \lambda_1, p_1^{\mu}; -\lambda_2, p_2^{\mu} \left| U \right| \lambda_0, p_0^{\mu} \right\rangle = H^{0\to 1+2}_{\lambda_1,\lambda_2} D^{J_0*}_{\lambda_0,\lambda_1-\lambda_2}(\phi,\theta,0)$$

螺旋度振幅形式

能量依赖部分振幅$H^{0\to1+2}_{\lambda_1,\lambda_2}$可以表示成轨道角动量与自旋耦合下的振幅形式$g^{0\to1+2}_{ls}$：

$$H^{0\to1+2}_{\lambda_1,\lambda_2}=\sum_{ls} g^{0\to1+2}_{ls}\, CG^{ls}_{\lambda_1,\lambda_2} F_l(q) \quad \begin{cases} |J_1-J_2|\le s\le J_1+J_2 \\ |l-s|\le J_0\le l+s \end{cases}$$

两种形式之间的变换矩阵$CG^{ls}_{\lambda_1,\lambda_2}$由CG系数给出：

$$CG^{ls}_{\lambda_1,\lambda_2}=\sqrt{\frac{2l+1}{2J_0+1}}\langle J_1,\lambda_1;J_2,-\lambda_2|s,\lambda_1-\lambda_2\rangle\langle l,0;s,\lambda_1-\lambda_2|J_0,\lambda_1-\lambda_2\rangle$$

$F_l(q)$是不同轨道角动量l对应的质量依赖的部分，采用Blatt-Weisskopf势垒因子描述：

$F_l(q)=q^l B'_l(qd)$，d为势垒因子缩放系数，和具体的反应过程有关。

$$q_0=\frac{\sqrt{(m_0^2-(m_1+m_2)^2)(m_0^2-(m_1-m_2)^2)}}{2m_0},\quad q=\frac{\sqrt{(s-(m_1+m_2)^2)(s-(m_1-m_2)^2)}}{2s}$$



螺旋度振幅形式

$B_l'(\mathrm{z})$的前几项：

$$B_0'(\mathrm{z}) = 1$$

$$B_1'(\mathrm{z}) = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$$

$$B_2'(\mathrm{z}) = \frac{1}{\sqrt{z^4+3z^2+9}}$$

$$B_3'(\mathrm{z}) = \frac{1}{\sqrt{z^6+6z^4+45z^2+225}}$$

最终得到了按末态粒子的相对轨道角动量和自旋耦合展开的衰变振幅，其中角分布依赖部分（D）与能量依赖的动力学部分（H）被拆分开。

螺旋度振幅形式

Isobar假设：

将一个多体的衰变过程分成不同的两体过程级联发生，总的振幅就是不同级联过程相乘。

$$A^{0\to r+1,r\to 2+3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}=\sum_{\lambda_r}A^{0\to r+1}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_r}f_r(m_{23})A^{r\to 2+3}_{\lambda_r,\lambda_2\lambda_3}$$

其中，$f_r(m_{23})$是中间共振态的传播子，主要是对于质量的依赖, 一般是采用BW形式。

$$f_r(m)=\frac{1}{m^2-m_0^2-im_0\Gamma(m)},\Gamma(m)=\Gamma_0\frac{\rho}{\rho_0}\frac{F_l^2(q)}{F_l^2(q_0)}$$

ρ是相空间因子，对于两体过程一般取$\frac{2q}{m}$。ρ_0，q_0是归一系数，以保证$\Gamma(m_0)=\Gamma_0$。

不同中间过程的振幅相互叠加最后构造整个过程的振幅：

$$A^{0\to 1,2,3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}=A^{0\to r_1+1,r_1\to 2+3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}+A^{0\to r_2+1,r_2\to 2+3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}+A^{0\to r_3+2,r_3\to 1+3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}$$

最后可以得到不同末态粒子动量对应的不考虑归一的概率密度$|A^{0\to 1,2,3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}|^2$。



螺旋度振幅形式

初态极化：

实验数据包含末态所有可能的螺旋度，可以对所有的概率密度求和得到总的概率密度。但初态的螺旋度是所有可能的螺旋度中的某一个，不考虑极化的时候不同螺旋度的概率是相等的，可以对初态所有的螺旋度对应的概率密度求平均得到

$$P(p_1^\mu, p_2^\mu, p_3^\mu | 0 \to 1+2+3) \propto \sum_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3} |A^{0\to 1+2+3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}|^2$$

当初态存在极化时，即初态的螺旋度不是均匀分布时，需要考虑极化的求和，

$$P(p_1^\mu, p_2^\mu, p_3^\mu | 0 \to 1+2+3) \propto \sum_{\lambda_0,\lambda_0',\lambda_1\lambda_2,\lambda_3} A^{0\to 1+2+3}_{\lambda_0,\lambda_1\lambda_2,\lambda_3} \rho_{\lambda_0,\lambda_0'} A^{*0\to 1+2+3}_{\lambda_0',\lambda_1\lambda_2,\lambda_3}$$

螺旋度振幅形式

相空间：

上述的概率密度是定义在均匀的四动量下的，具体到某个不变质量的分布时，形状会受相空间的投影形状影响。所有的末态粒子四动量构成了一个衰变过程的相空间，相空间下的均匀分布对应四动量的均匀分布。可以通过对均匀的四动量加一些约束来得到约束后的四动量分布。这些约束包括末态粒子的质能关系、正能量条件和四动量守恒等。相空间的表达式一般没有解析积分。

n体相空间：

$$d\Phi_n = (2\pi)^4 \delta\left(\sum_i p_i - \sum_{f=1}^{n} p_f\right) \prod_{f=1}^{n} \frac{d^3\vec{p}_f^{\,3}}{(2\pi)^3 2E_f}$$

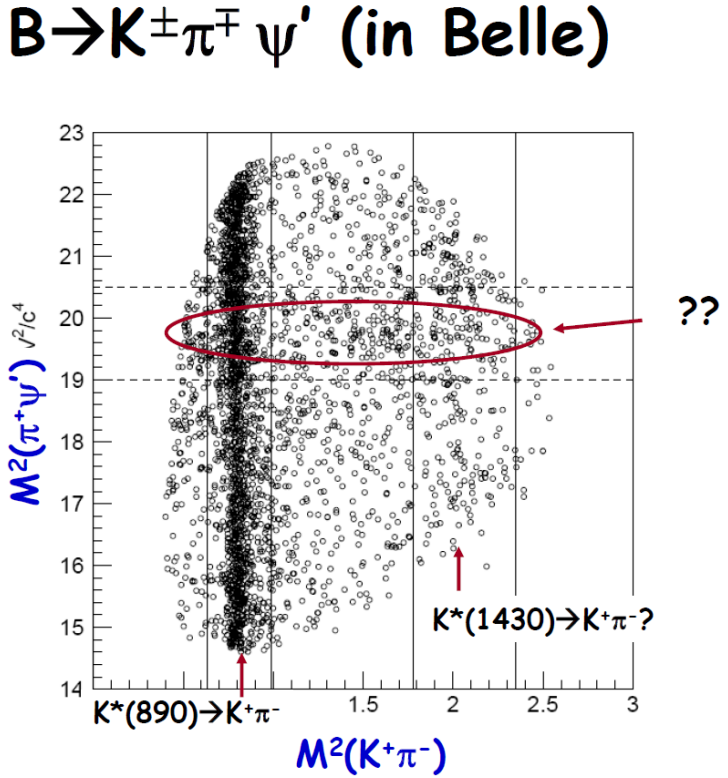
螺旋度振幅形式

Dalitz图（三体衰变）：

三体衰变的微分宽度： $d\Gamma = (2\pi)^4 \delta(p - p_1 - p_2 - p_3) \frac{1}{2M} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3\vec{p}_i^{\,3}}{(2\pi)^3 2E_i} |\mathcal{M}|^2$

单位面积的事例数密度，直接反映该运动学区域衰变振幅的模方：

$\frac{d\Gamma}{ds_1 ds_2}$（单位不变质量平方区间内的衰变率密度）$\propto |\mathcal{M}|^2$，反映动力学结构。



可以间接反映部分自旋宇称信息

螺旋度振幅形式

共振态传播子（Breit-Wigner）形式：

I. 常宽度：$BW(s)=\frac{1}{M^2-s-iM\Gamma}$ (窄共振、非相对论)

II. 相对论形式：$BW(s)=\frac{1}{M^2-s-iM\Gamma(s)}, \Gamma(s)=\Gamma_0(\frac{q}{q_0})^{2L+1}\frac{M}{\sqrt{s}}\frac{B_L(q)}{B_L(q_0)}$(宽度随能标变化)

III. Flatté形式: $BW(s)=\frac{1}{M^2-s-iM[\Gamma_1(s)+\Gamma_2(s)]}, \Gamma_i(s)=g_i\frac{q_i(s)}{8\pi M^2}$ (靠近阈值，两个耦合道)

IV. 复极点形式：$BW(s)=\frac{1}{s_{pole}-s}, s_{pole}=M_{pole}^2-iM_{pole}\Gamma_{pole}$ (参数化无关)

V. K矩阵、Gounaris-Sakurai(ρ).....

数据的极大似然拟合

构建合理的模型，有效地描述观测的实验数据（末态粒子四动量）的分布：
（1）衰变过程本身发生的概率；（2）实验探测时信号被探测到的概率。

I. 构造似然函数：

在分波分析中，不同分波振幅的幅度相角、共振态的质量宽度等自由参数的拟合一般通过最大似然法确定：

$$P(\vartheta|X)=\frac{\mathcal{L}(X,\vartheta)P(\vartheta)}{P(X)},\ \vartheta_0=\arg max\, P(\vartheta|X)=\arg min\,(-\ln\mathcal{L}(X,\vartheta)\cancel{-\ln P(\vartheta)+\ln P(X)})$$

ϑ:模型参数，X:实验测量数据，P:概率密度函数，$\mathcal{L}$:似然函数。

$$\mathcal{L}(\vartheta)=\prod_i\frac{|\mathcal{M}(X_i,\vartheta)|^2\epsilon\Phi}{\mathcal{N}(\vartheta)},\ -\ln\mathcal{L}(\vartheta)=-\sum_i ln|\mathcal{M}(X_i,\vartheta)|^2\cancel{-\sum_i lnc\Phi(X_i)}+Nln\mathcal{N}(\vartheta)$$

归一化因子：$\mathcal{N}(\vartheta)=\int|\mathcal{M}|^2\epsilon\,\Phi d\Phi$（无法解析计算）

$$\mathcal{N}(\vartheta)=\int|\mathcal{M}|^2\epsilon\,\Phi dx\approx\frac{\cancel{\Phi_{total}}}{N_{MC}}\sum_i|\mathcal{M}|^2\epsilon$$

归一化因子保证了概率密度在全相空间上归一，防止拟合通过整体放大振幅来提高似然。

数据的极大似然拟合

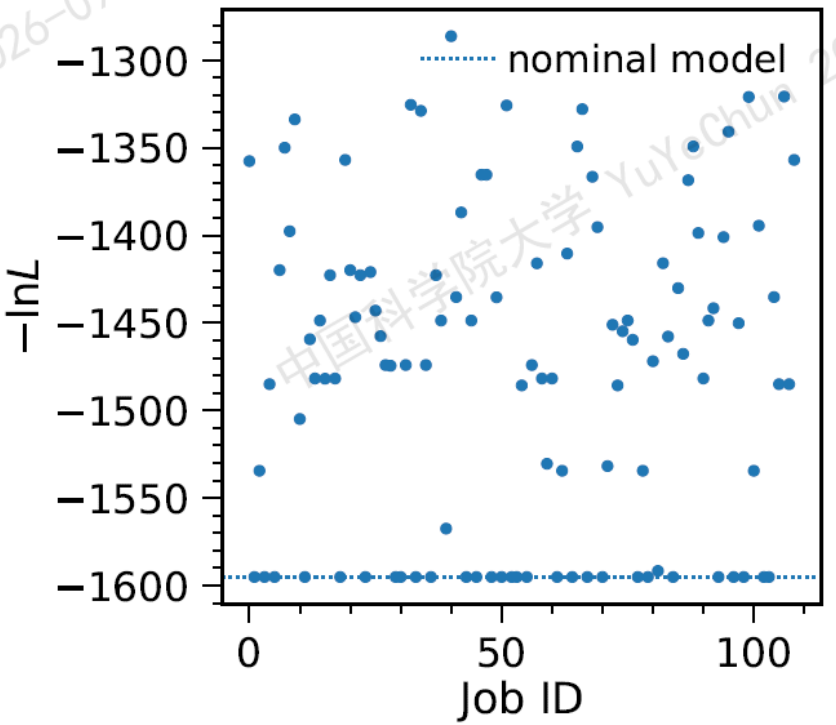
$$-\ln \mathcal{L}(\vartheta) = -\sum_i ln|\mathcal{M}(X_i,\vartheta)|^2 + Nln(\frac{\sum_i |\mathcal{M}|^2 \epsilon}{N_{MC}})$$

考虑本底事例后：

$$-\ln\mathcal{L}_{\text{sig}} = -\ln\mathcal{L}_{data} + \sum_n \omega_n \ln\mathcal{L}_{bkg}$$

II. 拟合得到极小值：

目前所有的拟合算法都只能得到局部的最小值，拟合结果非常依赖于初值和目标函数。所以一般需要重复设置拟合初值，检查不同初值的拟合结果。拟合过程中用到的最小化过程本身是一个确定的过程，只取决初始参数、模型和数据。



数据的极大似然拟合

III. 拟合结果：

(1) 参数误差矩阵：$V_{ij}^{-1}\mathcal{L}(\vartheta) = -\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial\vartheta_i \partial\vartheta_j}$

$$-\ln\mathcal{L}(X,\vartheta) = -\ln\mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}(\vartheta-\vartheta_0)^T V^{-1}(\vartheta-\vartheta_0) + O((\vartheta-\vartheta_0)^3)$$

$\mathcal{L}(X,\vartheta) = \mathcal{L}_0 e^{(-\frac{1}{2}(\vartheta-\vartheta_0)^T V^{-1}(\vartheta-\vartheta_0))}$（近似为高斯分布）

(2) 统计误差：$V_f = (\frac{\partial f(\vartheta)}{\vartheta})^T V \frac{\partial f(\vartheta)}{\vartheta}$

误差矩阵包含了参数之间的相关性，由MINUIT HESSE给出。中间共振态的质量宽度在拟合中可以作为自由拟合参数，其统计误差由MINUIT给出，包含了所有拟合参数之间的关联。

数据的极大似然拟合

(3) 拟合分支比：$FF_i = \frac{\int |\mathcal{M}(X)|^2 d\Phi}{\int |\sum_k \mathcal{M}_k(X)|^2 d\Phi}$

(4) 干涉比例：$FF_{i,j} = \frac{\int |\mathcal{M}_i(X)+\mathcal{M}_j(X)|^2 d\Phi}{\int |\sum_k \mathcal{M}_k(X)|^2 d\Phi} - FF_i - FF_j$

$$\sum_{\mathrm{i}} FF_i \neq 1.0$$

$$\sum_{\mathrm{i}} \sum_{j} FF_{i,j} = 1.0$$

(5) 显著性计算：中间共振态X的统计显著性是通过有无X的情况下对数似然值变化对应的置信度来确定的。

$\Delta\chi^2 = 2\Delta \ln \mathcal{L} \sim \chi^2(\Delta N_{para})$

置信度$p = PROB(\Delta\chi^2, \Delta N_{para})$

数据的极大似然拟合

IV. 其它：

(1) 冗余参数

(2) 探测器效应：
①探测器的效率；
②探测器的分辨：分辨的影响主要体现在一些较窄的共振态上，这些窄的共振态并不常见，所以一般的分波分析会忽略分辨的影响只处理效率的影响。



分波分析策略

分波分析的主要流程就是不断测试各种各样态的显著性。

I. 候选共振态的选择：PDG

对于候选的中间共振态，一般要求质量大于末态粒子之和（作为质量的阈值），或者质量接近阈值且有一定的宽度可使不变质量超过阈值。此外还需满足一些相加性、相乘性守恒律的约束。

除了共振态外，一般会考虑一些非共振的成分表示共振态难以描述的贡献。非共振态一般采用一些平坦的分布，比如均匀分布或者指数分布，且一般只考虑角动量较低的贡献:

(1) 指数形式：$f_r(m) = e^{[(\alpha+\beta i)(m^2-m_0^2)]}$

(2) 常数形式：$f_r(m) = 1$

II. 初始模型的选取：

初始解可以包含任意已知的粒子，来提高模型的表达能力。通常我们会结合不变质量谱、Dalitz图、角分布、理论预言等在候选共振态中选取显著度较高的态添加。



分波分析策略

III. 显著性检验：

结合拟合结果在各个维度上的投影分布，判断是否添加新的态，去掉不显著的态。显著性的标准一般采用$>5\sigma$，可以尽量保证结果的稳定性和有效性。显著性检验往往需要不断的尝试：

①将一个候选共振态放到分波解中；

②检查分波解各个成分的统计显著性，只保留显著性大于5σ的成分；

③重复步骤①、②直到所有的剩余候选共振态相对于当前分波解都不显著。

IV. 质量宽度的拟合：

一种方法将质量宽度作为拟合参数，通过拟合确定最好的质量宽度，但对于拟合的要求较高，容易陷入局部极值，或者质量宽度达到预设的边界。要得到合理的质量宽度往需要设定合适的初值，或者重复多次拟合。一般来说，对于一些没有描述好的峰状形状，可以通过放开质量拟合的方式确定其参数。

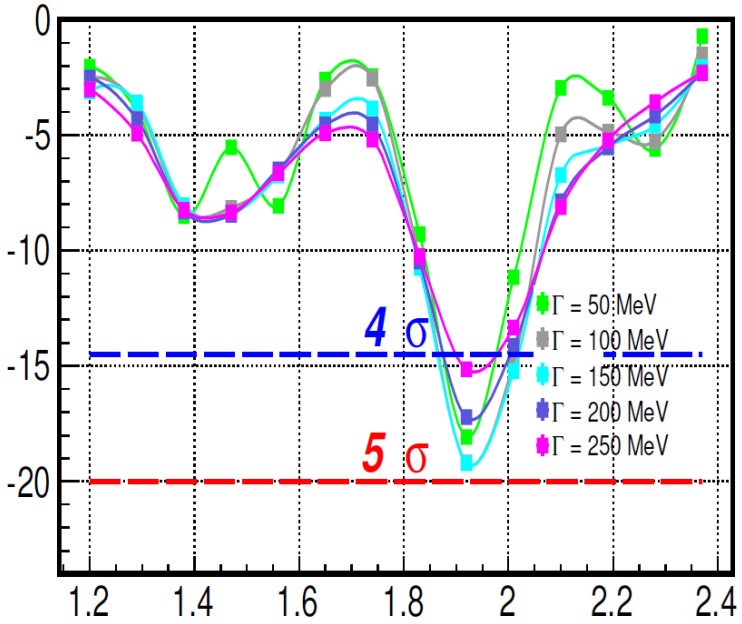
另一种方式是添加固定质量宽度的态，扫描不同质量宽度下的结果。扫描可以有效避免局部极值，但是需要大量的拟合测试，覆盖不同的质量宽度。



分波分析策略

(V. 额外共振态的扫描)

在拟合模型较为完整后，再对于可能存在的额外的没有明显结构的态进行扫描，避免遗漏。可以直接添加不同自旋宇称的新的态，将质量宽度作为拟合参数，也可以扫描不同质量宽度下的结果。



VI. 模型依赖检查：

在确立分波的基准解后，为了保证结果的可靠性，需要对基准模型进行大量的测试。这些测试从不同方面反映拟合结果的稳定性，影响较大的项会考虑进系统误差。

(1) 非共振态检查

不同末态粒子组合的非共振态一般具有相似的分布，从而产生很强的干涉效应，因此实际测试一般只采用一种末态组合。测试方法和共振态的显著性测试一样，通过测试不同模型下$-ln\mathcal{L}$的变化，以及对拟合结果的影响。保留具有较高显著性，对结果影响较大的非共振成分。

分波分析策略

(2) 输入输出检查（Input/Output Check）

基于数据是由拟合结果对应的分布产生的假设，可以模拟出数据产生的过程，给出toy MC样本替代随机的数据样本。如果使用同样的模型对toy MC样本进行拟合，新的拟合结果和输入结果的差别也就对应着基准的拟合结果和真实数据间的差别，也就反应了实际测量时拟合结果的统计误差以及可能存在的偏差。

$pull = \frac{\vartheta_{new} - \hat{\vartheta}}{\sigma_{new}}$（幅度相角、产额、质量宽度）

①一系列和数据统计量一致的样本（toy MC+本底）
②一致的本底事例样本
③一致的相空间MC样本
④一致的分波模型



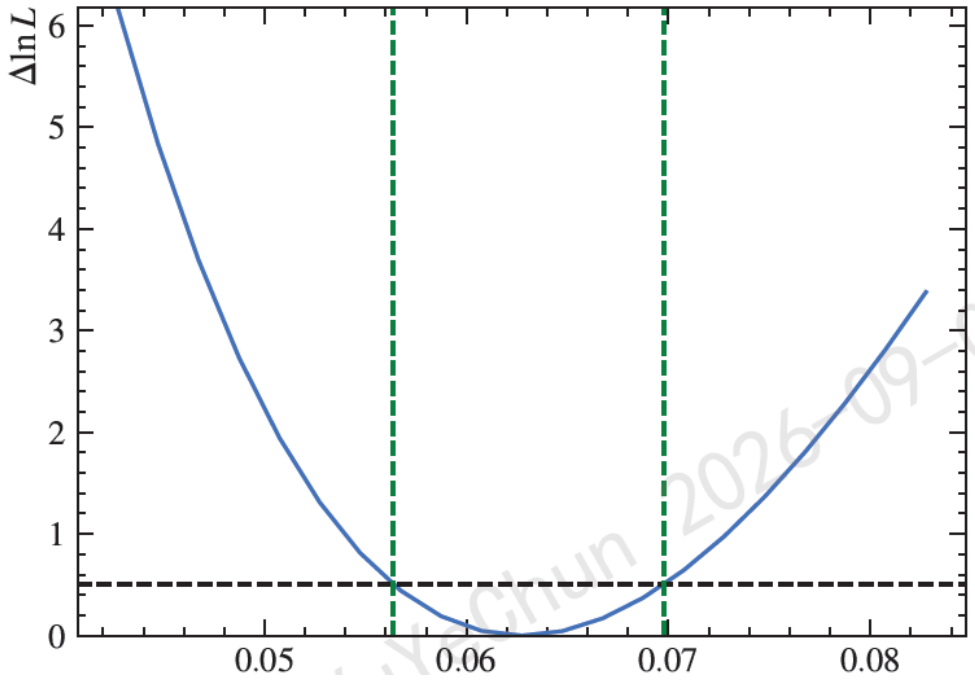
误差估计

I. 统计误差的检验：自助抽样法（Bootstrap）

除了用Hessian矩阵估计误差，还可以用数据样本本身通过放回抽样的方式产生样本。对这些样本拟合，可以得到新的拟合结果。我们认为真值和原始拟合值的差别与新的原始拟合值和新的拟合值的差别有相同的分布。

II. 质量宽度的不对称误差：似然函数轮廓方法

对于关心的参数，可以在极值点附近固定不同的值，而其它参数固定在使似然函数最大值时的参数上。这样在似然函数轮廓上$\Delta ln\mathcal{L} = 0.5$的位置上可以得到左右的不对称误差。



误差估计

III. 系统误差的来源：

1. 效率相关：$\int |\mathcal{M}|^2 \epsilon \, d\Phi \approx \frac{1}{\sum_i \omega_i} \sum_i \omega_i |\mathcal{M}|^2$

(1) 求和样本本身的统计量
(2) 不同的选择条件导致的求和样本的差异
(3) 权重的误差（修正蒙卡时计算的权重）：寻迹、粒子鉴别、其它差异

2. 本底模型：Sideband样本、Inclusive MC、Mixed MC、……
(1) 本底样本统计量：自助抽样法
(2) 本底比例的误差：本底比例的统计误差、本底的信号及本底模型的系统误差

3. 固定的输入参数：
(1) 固定的质量宽度：

固定值本身是带有误差的，这部分误差可以直接按照误差传递公式直接传递到拟合参数上去，得到拟合参数在此时对应系统误差。一般的做法是按照固定值本身的误差，随机产生新的固定值，在这些固定值拟合，得到新的拟合参数。取新的拟合参数的标准差作为系统误差。



误差估计

(2) Blatt-Wikspkof势垒因子：$d = 3.0\ \mathrm{GeV}^{-1}$

势垒因子依赖于具体的过程，没有绝对的标准值，需要考虑不同选取结果的差别。考虑到可以通过拟合确定合适的势垒因子，可以对势垒因子做扫描，一般把最大的差别作为系统误差。

4. 拟合模型：

一些未被包含的共振态（$< 5\sigma$）可能会对拟合结果造成影响。通过添加这些共振态可以得到新的拟合结果，取最大的差异最为系统误差。但是，相同自旋宇称的态可能存在重叠，使得对应贡献被新加的态替换，这样对应的就不再是原来的参数。因此，在考虑系统误差时需要去掉这些和新加的共振态自旋宇称一样，且存在重叠的共振态的参数。

5. 分辨效应：主要对较窄的共振态有明显影响



TFPWA工具介绍

TFPWA软件：

I.使用者只需要关心具体的物理过程，而无需了解复杂的振幅形式和程序的底层实现即可完成分波分析，降低了分波分析的使用门槛。TFPWA 将现代计算机技术，比如GPU 计算、自动微分等融入到框架里，大幅提高了分波分析的效率，降低了分析耗时。比如程序中对缓存的使用进行了优化，兼顾小样本的快速拟合，同时使处理大数据量的实验样本成为可能，扩展了分波分析的应用范围。

II.TFPWA 基于螺旋度振幅描述方式，对其中不同衰变道之间的对齐问题进行了扩展，完善了振幅的构造。它可以自动处理螺旋度振幅的对齐问题，去除其中冗余的自由度，同时提供了完善的分辨处理方案。框架也提供了自定义的接口及不同的配置选项，实现了个性化配置功能。

TFPWA工具介绍

- 开放源代码：https://github.com/jiangyi15/tf-pwa
- 用户手册：https://tf-pwa.readthedocs.io/en/latest/index.html
- 作者：蒋艺（中国科学院大学）jiangyi15@mails.ucas.ac.cn

I. 环境配置与安装：

miniconda安装:
① wget https://repo.anaconda.com/miniconda/Miniconda3-latest-Linux-x86_64.sh
② bash Miniconda3-latest-Linux-x86_64.sh (/hpcfs/bes/gpupwa/)
③ 按照提示安装

进入TFPWA环境 (lxlogin节点):
① conda create -n tf-pwa
② conda activate tf-pwa

下载源代码：git clone https://github.com/jiangyi15/tf-pwa.git (更新： git pull)



TFPWA工具介绍

安装TensorFlow与uproot:
①安装python3.12： conda install python=3.12 -c conda-forge
②更新pip： python -m pip install -i https://mirrors.tuna.tsinghua.edu.cn/pypi/web/simple --upgrade pip
③安装TensorFlow和CUDA： python -m pip install -i https://mirrors.tuna.tsinghua.edu.cn/pypi/web/simple tensorflow[and-cuda]
④安装uproot： python -m pip install -i https://mirrors.tuna.tsinghua.edu.cn/pypi/web/simple uproot

II. 输入文件的准备：

①数据样本事例四动量文件
②相空间MC样本事例四动量文件（带效率的truth）
③本底样本事例四动量文件
④事例对应的权重文件（可选）
⑤电荷信息、电荷共轭信息等（可选）

(E, p_x, p_y, p_z)

0.695622292030	0.163197264080	0.439084570571	-0.144020219594
1.406959402000	-0.414691364984	0.287763871658	0.549875299216
1.582422535641	0.251507990408	-0.726804674893	-0.406991956332
0.513877062455	0.063721722974	0.121086330719	0.040340246057
1.500057923874	0.783762487882	0.307403919678	0.344960907303
1.672171068148	-0.847481759088	-0.428490250398	-0.383939487911
0.958553931479	0.315521288099	0.747456062777	-0.129851638908
1.269452751081	-0.393637967507	-0.136302839510	0.124844036865
1.458274744781	0.078119131293	-0.611153223267	0.006086557581

事例1
事例2
事例3

需要较高的精度

TFPWA工具介绍

III. 修改配置文件：XXX/tf-pwa/config.yml

data:

data_order: [B, C, D]

data: [“data/data_new.dat”]

phsp: [“data/PHSP_new.dat”]

bg: [“data/bg_new.dat”]

bg_weight: 1.0

random_z: True/False (由初态粒子极化确定)

decay:

A:

- [R_BC, D, model: default]
- [R_BD, C, model: default]
- [R_CD, B, model: default]

R_BC: [B, C]

R_BD: [B, D]

R_CD: [C, D]

```yaml
data:
  ## 4-momentum order of final particl
  ## the `finals` in `particle` will b
  ## it is necessary when dat files ha
  dat_order: [phi, eta1, eta2]
  ## The file path is grouped by `name
  ## Each tail corresponding to the va
  ## basic data files, every line is `
  ## and every m lines group as m fina
  ## support input multi data as [["da
  data: ["../data.dat"]
  ## The additional file is grouped by
  ## Each tail is corresponding to the
  ## data weight file, each line for a
  # data_weight: ["data/data_weight.da
  ## phase space data for normalize am
  phsp: ["../phsp.dat"]
  ## phase space weight file, each lin
  # phsp_weight: ["data/phsp_weight.da
  ## phase space without efficiencies,
  # phsp_noeff: ["data/PHSP4600_noeff.
  ## much more phase space, used for p
  # phsp_plot: ["data/PHSP4600_plot.da
  ## optional weight background data,
  bg: ["../bkg.dat"]
  ## background weight
  bg_weight: 1.0
  ## using total monumtum direction as
  ## set to False if the initial parti
  random_z: False
```

```yaml
decay:
  ## each entry is a list of direct deca
  ## `dec_file` entry for loading `*.dec
  ## `-` is often used for list in yaml
  A:
    ## for example A -> R_CD + B, R_CD -
    ## the optional `key: value` mean op
    ## note there, R1 is overrated by `p
    - [R_phieta1, eta2, model: default]
    - [R_phieta2, eta1, model: default]
    - [R_eta1eta2, phi, model: default]
  ## set l_list to allow only l=0
  # - [ NR(BC)SP, D, curve_style: "g-",
  # - [B, C, D, curve_style: "darkgreen"
  # - [R_BC2, D, p_break: True] # allow
  # R_BC2: [B, C, c_break: False] # enab
  R_phieta1: [phi, eta1]
  R_phieta2: [phi, eta2]
  R_eta1eta2: [eta1, eta2]
```

TFPWA工具介绍

particle:

$top:
  A:
    J: 1 # spin, use 1/2 or 0.5 for half spin
    P: -1 # parity, alias: `Par`
    mass: 3.097
    spins: [-1, 1] (可选，粒子自旋可用投影)
    #polarization: “vector“ (可选，束流极化效应)

$finals:
  B:
    J: 1
    P: -1
    mass: 1.01946
  C:
    J: 0
    P: -1
    mass: 0.547862
  D:
    J: 0
    P: -1
mass: 0.547862

```
particle:
  ## top decay particle
  $top:
    A:
      J: 1 # spin, use 1/
      P: -1 # parity, ali
      mass: 3.097
      spins: [-1, 1] # li
      # polarization: "ve
  ## final particles
  $finals:
    phi:
      J: 1
      P: -1
      display: "$\\phi$"
      mass: 1.01946
    eta1:
      J: 0
      P: -1
      display: "$\\eta$"
      mass: 0.547862
    eta2:
      J: 0
      P: -1
      display: "$\\eta$"
      mass: 0.547862
```

TFPWA工具介绍

```
$include: Resonances.yml
  R_BC:
    - phi_1680
    - phi_2170
R_BD:
    - phi_1680
    - phi_2170
R_CD:
    - f0_1500
    - f0_1710
    - f2_1525
```

```
phi_1680:
  {
    J: 1 , P: -1 , mass: 1.7056 ,  m_max: 1.72 , m_min: 1.68 ,  width: 0.1865 , g_max: 0.30, g_min: 0.15 , model: BWR , display: "$\\phi(1680)$",  disable: False,   float: mg
  }
```

可用的Breit-Wigner 形式：https://tf-pwa.readthedocs.io/en/latest/particle_model.html#available-resonances-model



TFPWA工具介绍

画图：

```yaml
mass:
  R_eta1eta2:
    ## label of display
    ## use `$$` for latex math
    display: "$M_{\\eta_{1}\\eta_{2}}$"
    range: [1.0,2.1]
    bins: 110 # number of bins is 50
    # upper_ylim: 200
    # trans: x*x
  R_phieta1:
    display: "$M_{\\phi\\eta_{1}}$"
    range: [1.5,2.6]
    bins: 110 # number of bins is 50
  R_phieta2:
    display: "$M_{\\phi\\eta_{2}}$"
    range: [1.5,2.6]
    bins: 110 # number of bins is 50
```

```yaml
angle:
  ## If it named as `[.../]A/R_BC`, it refer to the  decay A -> R_B
  ## the angle is determined by the last 2 particles, the other ord
  ## for example, D->E+F in [A->R_BC+D, D->E+F, R_BC->B+C] is `R_BC
  A/R_phieta1:
    ## include "alpha, cos(beta), gamma", # add `cos` for cos(beta)
    alpha:
      display: "$\\phi_{\\phi\\eta_{1}}$"
      bins: 100
      legend: True
    cos(beta):
      display: "$\\cos(\\theta_{\\phi\\eta_{1}})$"
      bins: 100 # number of bins is 50
      legend: True # do not plot the legend
      range: [-1, 1] # range for plot
  A/R_phieta2:
    alpha:
      display: "$\\phi_{\\phi\\eta_{2}}$"
      bins: 100
      legend: True
    cos(beta):
      display: "$\\cos(\\theta_{\\phi\\eta_{2}})$"
      bins: 100
      legend: True
      range: [-1, 1]
```

源代码： XXX/tf-pwa/tf_pwa/config_loader/plot.py



TFPWA工具介绍

IV. 产生Toy MC（提供truth级别四动量文件）：

generate_toy_mc.py：

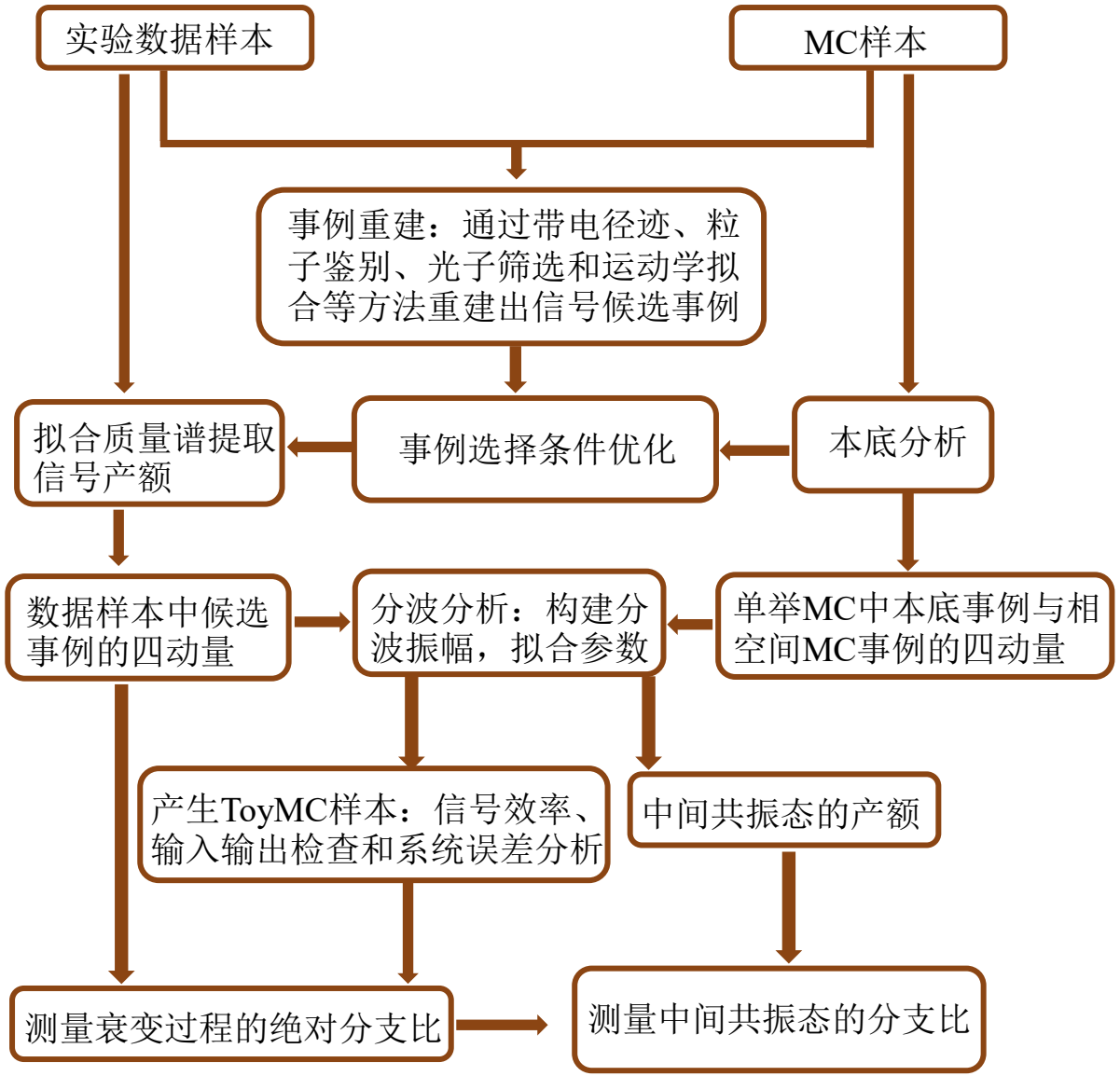
```
devices = "/device:GPU:0"
gen_num = 8000000

pm_tag = ["pp"]
pid = np.array([333, 221, 221], dtype=int)  # phi, eta, eta
cc = np.array([0, 0, 0], dtype=int)  # p+, K-, anti-Lambda, eta
config_file = "./config.yml"
```

母粒子静止系：

```
3
333   0.479023365196   -0.044701760834   0.733412654989   1.344862240500
221   -0.655005372687   0.062977514307   -0.048807958598   0.857632318318
221   0.175982007491   -0.018275753473   -0.684604696391   0.894505467558
3
333   -0.326897637819   -0.520516363787   0.689232124773   1.375550422195
221   0.142744737351   -0.094099030623   0.080316029655   0.579511969910
221   0.184152900468   0.614615394411   -0.769548154427   1.141937610741
3
333   0.135684348073   0.852868128071   -0.155739504976   1.345119983942
221   -0.403985146306   -0.857398118170   0.278452504771   1.129612367113
221   0.268300798233   0.004529990099   -0.122712999796   0.622267700034
```



TFPWA工具介绍


实验数据样本
MC样本
事例重建：通过带电径迹、粒子鉴别、光子筛选和运动学拟合等方法重建出信号候选事例
拟合质量谱提取信号产额
事例选择条件优化
本底分析
数据样本中候选事例的四动量
分波分析：构建分波振幅，拟合参数
单举MC中本底事例与相空间MC事例的四动量
产生ToyMC样本：信号效率、输入输出检查和系统误差分析
中间共振态的产额
测量衰变过程的绝对分支比
测量中间共振态的分支比

总结

- 分波分析是研究多体强子衰变谱学的核心工具
- 螺旋度振幅形式：清晰分离角分布与动力学部分
- 极大似然拟合：从数据中提取模型参数
- 分析策略：模型构建 → 显著性检验 → 输入输出检查
- 误差分析：统计误差 + 系统误差
- TF-PWA工具：GPU加速框架，螺旋度振幅构造自动化，大幅降低分波分析门槛
- 广泛应用于BESIII、LHCb等实验



一些参考资料

- 振幅构造：

  Phys. Rev. D, 1972, 5: 624.

  Phys. Rev. D, 1993, 48: 1225.

  Phys. Rev. D, 1998, 57: 431.

  Phys. Rev., 1966, 145: 1229.

- 极大似然拟合：

  The European Physical Journal C, 2022, 82(5).

  MINUIT User’s Guide 2004.

  The roofit toolkit for data modeling 2003.

- TFPWA：

  蒋艺，博士论文，中国科学院大学（2023）

  Nuovo Cim. C, 2024, 47: 203.

- 分析文章：

  JHEP, 2022, 12: 033

  arXiv:2610.38406

  Phys. Rev. Lett., 2024 133: 131902

