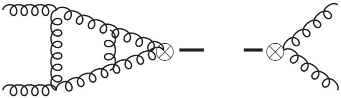
Reduction and Numerical Calculation of Feynman Integrals

Renyou Zhang

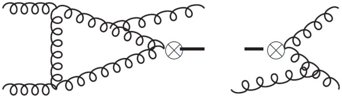
IHEP，Beijing，　13-17/6/2016

NNLO QCD corrections to Higgs production:

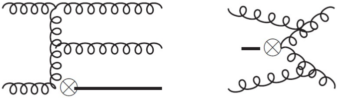
1. double – virtual



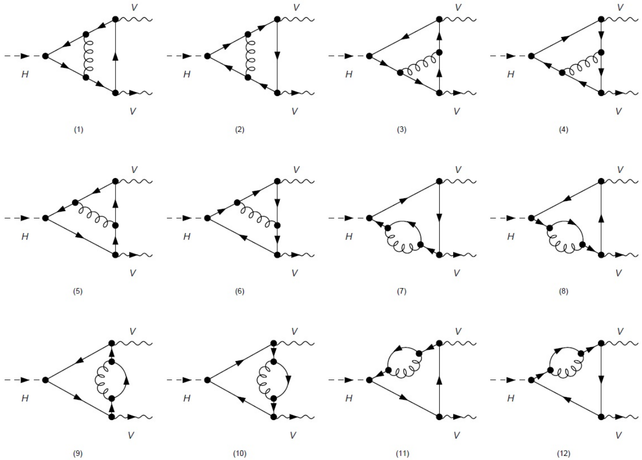
2. real – virtual



3. double – real



NLO QCD corrections to Higgs decay (loop diagrams):



Virtual corrections

1. **Feynman diagrams, amplitudes generation**
2. **reduction of tensor integrals to scalar integrals**
3. **reduction to master integrals**
4. **numerical calculation**

Two loop calculation programs:

REDUZE

- Import Qgraph amplitude
- Squared amplitude
- Reduce loop integral by IBP
- Calculate master integral

FIRE

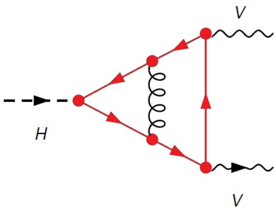
- Reduce loop integral by IBP

FIESTA

- Calculate master integral

1. Reduction of tensor integrals

三点张量积分约化



- 圈积分中含 6 个传播子
- 有 5 个费米传播子
- 狄拉克旋量代数化简
- 3 点 3 阶张量积分
- $L=2,\ E=2,\ N=7$

$$\frac{q_i^\mu}{D} \to \frac{1}{p_1^2 p_2^2 - (p_1\cdot p_2)^2}\left\{\left[p_2^2\frac{q_i\cdot p_1}{D} - p_1\cdot p_2\frac{q_i\cdot p_2}{D}\right]p_1^\mu - \left[p_1\cdot p_2\frac{q_i\cdot p_1}{D} - p_1^2\frac{q_i\cdot p_2}{D}\right]p_2^\mu\right\}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{q_i^\mu q_j^\nu}{D} \;\to\; & \frac{1}{(p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2)(2-2\epsilon)} \\
& \Bigg\{ \Bigg[(p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2)\frac{q_i\cdot q_j}{D} - p_2^2\frac{p_1\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} + p_1\cdot p_2\frac{p_1\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D} \\
& + p_1\cdot p_2\frac{p_2\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} - p_1^2\frac{p_2\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D}\Bigg] g^{\mu\nu} \\
& + \Bigg[-p_2^2\frac{q_i\cdot q_j}{D} + \frac{(3-2\epsilon)p_2^4}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_2^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D} \\
& - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_2^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} + \frac{(2-2\epsilon)(p_1\cdot p_2)^2+p_1^2p_2^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D}\Bigg] p_1^\mu p_1^\nu \\
& + \Bigg[p_1\cdot p_2\frac{q_i\cdot q_j}{D} - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_2^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} + \frac{(2-2\epsilon)p_1^2p_2^2+(p_1\cdot p_2)^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D} \\
& + \frac{(3-2\epsilon)(p_1\cdot p_2)^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_1^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D}\Bigg] p_1^\mu p_2^\nu \\
& + \Bigg[p_1\cdot p_2\frac{q_i\cdot q_j}{D} - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_2^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} + \frac{(3-2\epsilon)(p_1\cdot p_2)^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D} \\
& + \frac{(2-2\epsilon)p_1^2p_2^2+(p_1\cdot p_2)^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_1^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D}\Bigg] p_2^\mu p_1^\nu \\
& + \Bigg[-p_1^2\frac{q_i\cdot q_j}{D} + \frac{(2-2\epsilon)(p_1\cdot p_2)^2+p_1^2p_2^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_1^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_1\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D} \\
& - \frac{(3-2\epsilon)p_1\cdot p_2 p_1^2}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_1\cdot q_j}{D} + \frac{(3-2\epsilon)p_1^4}{p_1^2p_2^2-(p_1\cdot p_2)^2}\frac{p_2\cdot q_i p_2\cdot q_j}{D}\Bigg] p_2^\mu p_2^\nu \Bigg\}
\end{aligned}
$$

通过轮换将圈积分分母变为

$$\begin{aligned} D &= D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6 \\ &= (q_1^2 - m_1^2)\Big[(q_1+p_1)^2 - m_2^2\Big]\Big[(q_1-p_2)^2 - m_3^2\Big] \\ &\quad (q_2^2 - m_4^2)\Big[(q_2+p_2)^2 - m_5^2\Big]\Big[(q_1+q_2)^2 - m_6^2\Big] \end{aligned}$$

添加定义

$$D_7 = (q_2 + p_1)^2$$

上述 3 点最多 3 阶的张量积分约化为 $76 + 15$ 个标量积分。

2. Reduction to master integrals (IBP)

标量积分

$$I(n_1,\ldots,n_N)=\frac{1}{(i\pi^{d/2})^L}\int d^dk_1\cdots d^dk_L\,\frac{1}{D_1^{n_1}\cdots D_N^{n_N}}$$

其中， $D_\alpha\,(\alpha=1,\ldots,N)$ 为圈动量 $k_i\,(i=1,\ldots,L)$ 的二次函数：

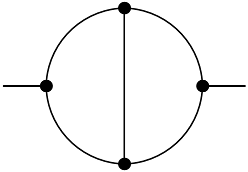
$$D_\alpha=\sum_{ij\in\mathcal{I}}\mathcal{R}_{\alpha,ij}S_{ij}+m_\alpha^2,\qquad(\alpha=1,\ldots,N)$$

1. 圈积分动量 k 有 L 个，独立的外线动量 p 有 E 个。按照 k,p 顺序排列。 指标集

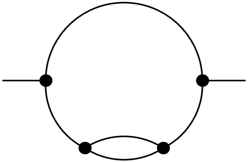
$$\mathcal{I}=\{ij\,|\,i\le L,j\ge i\}$$

2. m_α^2 未必是传播子上粒子质量平方，可能含有外线动量的不变量。

3. 选定 N 的值。使得 $N=|\mathcal{I}|=L(L+1)/2+LE$，且 $\mathcal{R}$ 为可逆方阵。



$$
\begin{aligned}
D_1 &= -(k_1+p)^2 + m_1^2 \\
D_2 &= -(k_2+p)^2 + m_2^2 \\
D_3 &= -k_1^2 + m_3^3 \\
D_4 &= -k_2^2 + m_4^2 \\
D_5 &= -(k_1-k_2)^2 + m_5^2
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
D_1 &= -k_1^2 + m_1^2 \\
D_2 &= -k_1^2 + m_2^2 \\
D_3 &= -(k_1+p)^2 + m_2^3 \\
D_4 &= -k_2^2 + m_4^2 \\
D_5 &= -(k_1+k_2)^2 + m_5^2
\end{aligned}
$$

$$D_1 - D_2 - (m_1^2 - m_2^2) = 0$$

$$D \sim k_2 \cdot p$$

这种情况在高圈情形下出现。

积分存在一定的对称性：积分动量作任意的非奇异变换，积分保持不变。特别地，

$$k_i \to k_i' = k_i + x q_j$$

则由积分不变性知：

$$\int d^d k_1 \cdots d^d k_L \left[\hat{O}_{ij} \frac{1}{D_1^{n_1} \cdots D_N^{n_N}} \right] = 0, \qquad (i \leq L)$$

其中，$\hat{O}_{ij} = \partial_i \cdot q_j$

$$\hat{O}_{ij} = d\delta_{ij} + \left[\mathcal{R}^{-1}_{jk,\beta} (D_\beta - m_\beta^2) \right] \left[(1 + \delta_{ik}) \mathcal{R}_{\alpha,ik} \frac{\partial}{\partial D_\alpha} \right]$$

1. 当 $j > L$, $k > L$ 时，

$$\mathcal{R}^{-1}_{jk,\beta} (D_\beta - m_\beta^2) = S_{jk}$$

升降算符

$$\alpha^{\pm} I(n_1,\ldots,n_\alpha,\ldots,n_N) = I(n_1,\ldots,n_\alpha \pm 1,\ldots,n_N)$$

满足关系：

$$[\alpha^+,\,\beta^-] = 0, \qquad \alpha^+\alpha^- = \alpha^-\alpha^+ = 1$$

引入辅助算符 n_α，满足性质：

$$[\alpha^{\pm},\,n_\beta] = \pm\delta_{\alpha\beta}\alpha^{\pm}$$

则 IBP 关系可以表达为：

$$\left(\hat{O}_{ij}(n_\alpha\alpha^+,\alpha^-) = d\delta_{ij} - \left[(1+\delta_{ik})\mathcal{R}_{\alpha,ik}n_\alpha\alpha^+\right]\left[\mathcal{R}^{-1}_{jk,\beta}(\beta^- - m^2_\beta)\right]\right) I(n_1,\ldots,n_N) = 0$$

1. 当 $j > L$, $k > L$ 时,

$$\mathcal{R}^{-1}_{jk,\beta}(\beta^- - m^2_\beta) = S_{jk}$$

IBP 性质

一、在 $L(L+E)$ 个 IBP 关系中，独立的只有如下的 $L+E+1$ 个：

$$\hat{O}_{12}, \ldots, \hat{O}_{i,i+1}, \ldots, \hat{O}_{L1}, \qquad \hat{O}_{1L+1}, \ldots, \hat{O}_{1,L+i}, \ldots, \hat{O}_{1L+E}, \qquad \sum_{i=1}^{L} \hat{O}_{ii}$$

二、以前面的自能图为例，当 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 0$ 时，有对称性

$$(1 \leftrightarrow 2,\, 3 \leftrightarrow 4), \qquad (1 \leftrightarrow 3,\, 2 \leftrightarrow 4)$$

因此，有

$$\hat{O}_{11}\Big|_{1\leftrightarrow 2,\, 3\leftrightarrow 4} = \hat{O}_{22}, \qquad \hat{O}_{12}\Big|_{1\leftrightarrow 2,\, 3\leftrightarrow 4} = \hat{O}_{21}, \qquad \hat{O}_{13}\Big|_{1\leftrightarrow 2,\, 3\leftrightarrow 4} = \hat{O}_{23}$$

$$\hat{O}_{11}\Big|_{1\leftrightarrow 3,\, 2\leftrightarrow 4} - \hat{O}_{11} = \hat{O}_{13}, \qquad \hat{O}_{22}\Big|_{1\leftrightarrow 3,\, 2\leftrightarrow 4} - \hat{O}_{22} = \hat{O}_{23}$$

独立的 IBP 式只有两个：

$$\hat{O}_{11} = d - n_1 - n_5 - 2n_3 + n_1 1^+(-p^2 - 3^-) + n_5 5^+(4^- - 3^-)$$
$$\hat{O}_{12} = n_5 - n_3 + n_1 1^+(-p^2 - 2^- - 3^- + 5^-) + n_3 3^+(5^- - 4^-) + n_5 5^+(4^- - 3^-)$$

显然，考虑了对称性后，IBP 关系式数目进一步减少。

推广 IBP

由独立的外线动量给出 $N' = E(E+1)/2$ 个不变量

$$S_{ij} \qquad (i = L+1, \ldots, L+E, \, j \geq i)$$

则标量积分 $I(n_1, \ldots, n_N)$ 为上述变量的解析函数。作泰勒展开

$$I(n_1, \ldots, n_N) = \left(\frac{\det S}{\det S^0} \right)^{(E+1-d)/2} \sum I(n_1, \ldots, n_N, n_{N+1}, \ldots, n_M) D_{N+1}^{n_{N+1}-1} \ldots D_M^{n_M-1}$$

1. $M = N + N'$
2. 求和范围为 $n_{N+1}, \ldots, n_M \geq 1$
3. $D_\alpha = -S_{ij} + S_{ij}^0 \quad (\alpha > N, i > L, j \geq i)$
4. $I(n_1, \ldots, n_N, 1, \ldots, 1) = I(n_1, \ldots, n_N)\Big|_{S=S^0}$

推广 $\mathcal{R}$ 矩阵为

$$\mathcal{R}_{N\times N} \longrightarrow \mathcal{R}_{N\times N} \oplus \mathrm{diag}(-1,\ldots,-1)_{N'\times N'}$$

则有“IBP”关系式

$$\left(\hat{O}_{ij} = d\delta_{ij} - \left[(1+\delta_{ik})\mathcal{R}_{\alpha,ik} n_\alpha \alpha^+\right]\left[\mathcal{R}^{-1}_{jk,\beta}(\beta^- - m_\beta^2)\right] - q_j \cdot \frac{\partial m_\alpha^2}{\partial q_i} n_\alpha \alpha^+\right) \times I(n_1,\ldots,n_N,n_{N+1},\ldots,n_M) = 0$$

1. 上面的“IBP”关系式成立 $\forall\, i,j$

2. $\frac{\partial m_\alpha^2}{\partial q_i} = 0$ ($\alpha > N$ or $i \leq L$)

3. 上面的“IBP”关系式包含前述的 IBP 关系式。

4. 上述“IBP”关系式告诉：多点少圈积分的约化等同于少点高圈积分的约化，只需合适定义相关的质量。

标量积分约化 以积分 $I(n_1,n_2,n_3)$ 为例

一、将 (n_1,n_2,n_3) 参数空间分割为 2^3 个 sectors，并编序

$$
\begin{array}{cccc}
 & ++- & +-- & \\
+++ & -++ & -+- & --- \\
 & +-+ & --+ &
\end{array}
$$

二、给定一个 sector，其上的任一点处积分表达为 corner 处积分的升降

$$I(n_1,n_2,n_3)=(1^+)^{n_1-1}(2^+)^{n_2-1}(3^-)^{-n_3}I(1,1,0)\qquad(++-\ \text{sector})$$

三、利用升降算符的性质，改造 IBP 关系式，使其为只含有 $1^+,2^+,3^-$ 的多项式

$$\hat{O}=\sum_{r_1,r_2,r_3}C_{r_1r_2r_3}(n_1,n_2,n_3)(1^+)^{r_1}(2^+)^{r_2}(3^-)^{r_3}$$

四、对升降算符的单项式 $(1^+)^{r_1}(2^+)^{r_2}(3^-)^{r_3}$ 编序

五、求解 IBP 系统的合适的约化基

六、按照 IBP 基约化 $(1^+)^{n_1-1}(2^+)^{n_2-1}(3^-)^{-n_3}$

如果单项式 $(1^+)^{n_1-1}(2^+)^{n_2-1}(3^-)^{-n_3}$ 不可约，则有主积分

$$(1^+)^{n_1-1}(2^+)^{n_2-1}(3^-)^{-n_3}I(1,1,0) = I(n_1,n_2,n_3)$$

标量积分的约化过程最终实现两个目的：1、确定主积分　2、标量积分约化

一个简单的例子：单圈自能图

$$D_1 = -(k+p)^2 + m_1^2, \qquad D_2 = -k^2 + m_2^2$$

IBP 算符有如下

$$\hat{O}_{11} = d - n_1 - 2n_2 + n_1 1^+(m_1^2 + m_2^2 - p^2 - 2^-)$$
$$\hat{O}_{11} - \hat{O}_{12} = d - n_2 - 2n_1 + n_2 2^+(m_1^2 + m_2^2 - p^2 - 1^-)$$

(n_1, n_2) 参数空间分为 4 个 sectors： $++, +-, -+, --$ 。易知

$$I(-,-) = 0, \qquad I(+,-)\Big|_{m_1=0} = 0, \qquad I(-,+)\Big|_{m_2=0} = 0$$

因此，当 $m_1 = m_2 = 0$ 时，只有 $++$ 为非平庸 sector。显然，唯一的主积分为

$$I(1,1)$$

任一积分 $I(n_1, n_2)$ $(n_{1,2} > 0)$ 均可约化至 $I(1,1)$ 。

3. Numerical calculation (SecDec)

在高阶微扰论计算中，会遇到两种类型的积分：圈积分和相空间积分。随着阶数和外线数目的增加，积分表现出如下特点：

一、积分维数高

二、质量标度多

三、极点结构复杂

处理这些积分的一般步骤为：

一、维数正规化

二、积分参数化（x, α）

三、极点分离

四、数值计算

积分参数化 以费曼参数化为例

$$\frac{1}{D_1^{n_1}\cdots D_N^{n_N}} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n_1)\cdots\Gamma(n_N)}\int_0^\infty \prod_{\alpha=1}^{N} dx_\alpha^{n_\alpha-1}\delta\Big(1-\sum_{\alpha=1}^{N}x_\alpha\Big)\frac{1}{\left[\sum_{\alpha=1}^{N}x_\alpha D_\alpha\right]^n}$$

利用高斯积分，积分掉动量，有

$$I(n_1,\cdots,n_N) = \frac{\Gamma(n-Ld/2)}{\Gamma(n_1)\cdots\Gamma(n_N)}\int_0^\infty \prod_{\alpha=1}^{N} dx_\alpha x_\alpha^{n_\alpha-1}\delta\Big(1-\sum_{\alpha=1}^{N}x_\alpha\Big)\frac{\mathcal{U}^{n-(L+1)d/2}}{\mathcal{W}^{n-Ld/2}}$$

$\mathcal{U}$ 为费曼参数的 L 次齐次函数。$\mathcal{W}$ 为费曼参数的 $L+1$ 次齐次函数，并依赖于粒子质量及运动学。两者可以由积分对应的费曼图的拓扑结构得到：

$$\mathcal{U}(x) = \sum_{T\in\mathcal{T}_1}\Big[\prod_{\alpha\notin T}x_\alpha\Big], \qquad \mathcal{V}(x) = \sum_{T\in\mathcal{T}_2}\Big[\prod_{\alpha\notin T}x_\alpha\Big]S_T$$

$$\mathcal{W}(x) = -\mathcal{V}(x)+\mathcal{U}(x)\sum_{\alpha=1}^{N}x_\alpha m_\alpha^2$$

几点说明：

1. 标量积分 $I(n_1, \cdots, n_N)$ 未必是主积分， m_α^2 是内线传播子上的粒子质量，而非质量参数。

2. 张量积分 $I(n_1, \cdots, n_N)^{\mu_1, \cdots, \mu_r}_{i_1, \cdots, i_r}$ 有类似的参数化，相应的洛伦兹积分核为

$$\sum_{m=0}^{[r/2]} \left(\det\mathcal{R}\right)^{r-m} \left(-\frac{1}{2}\right)^m \Gamma(n - Ld/2 - m) \left[(\mathcal{R}^{-1} \otimes g)^{(m)} (\mathcal{R}^{-1}\mathcal{P})^{(r-2m)}\right]^{\mu_1, \cdots, \mu_r}_{i_1, \cdots, i_r}$$

3. 除依赖运动学外，上式为费曼参数的多项式。因此，张量积分的处理方法相同。

极点分离 以标量积分为例

一、将 N 维积分区域分解为 N 个 primary sectors

$$1=\sum_{\alpha=1}^{N}\left[\prod_{\beta\neq\alpha}\theta(x_\alpha-x_\beta)\right]$$

$$x_\beta=\begin{cases} t_\beta x_\alpha & \beta<\alpha \\ x_\alpha & \beta=\alpha \\ t_{\beta-1}x_\alpha & \beta>\alpha \end{cases}$$

$$I(n_1,\cdots,n_N)\Big|_\alpha=\frac{\Gamma(n-Ld/2)}{\Gamma(n_1)\cdots\Gamma(n_N)}\int_0^1\prod_{\beta=1}^{N-1}dt_\beta t_\beta^{n_\beta-1}\frac{\mathcal{U}_\alpha^{n-(L+1)d/2}}{\mathcal{W}_\alpha^{n-Ld/2}}$$

其中， $\mathcal{U}_\alpha=\mathcal{U}/x_\alpha^L$， $\mathcal{W}_\alpha=\mathcal{W}/x_\alpha^{L+1}$

二、选择积分变量集 以 α-sector 为例

$$\mathcal{I}_\alpha = \{t_{\beta_1}, \cdots, t_{\beta_{n_\alpha}}\}, \qquad \mathcal{U}_\alpha,\, \mathcal{W}_\alpha\Big|_{\mathcal{I}_\alpha \to 0} \longrightarrow 0$$

三、将 n_α 维积分区域（超立方体）分解为 n_α 个 subsectors

$$\prod_{j=1}^{n_\alpha} \theta(1-t_{\beta_j})\,\theta(t_{\beta_j}) = \sum_{k=1}^{n_\alpha}\left[\theta(1-t_{\beta_k})\prod_{j\neq k}\theta(t_{\beta_k}-t_{\beta_j})\,\theta(t_{\beta_j})\right]$$

$$t_{\beta_j} \to \begin{cases} t_{\beta_j} t_{\beta_k} & j \neq k \\ t_{\beta_k} & j = k \end{cases}$$

$$I(n_1,\cdots,n_N)\Big|_{\alpha,k} = \frac{\Gamma(n-Ld/2)}{\Gamma(n_1)\cdots\Gamma(n_N)}\int_0^1 \prod_{\beta=1}^{N-1} dt_\beta\, t_\beta^{n_\beta-1}\, t_{\beta_k}^{\Delta_k}\, \frac{\mathcal{U}_{\alpha,k}^{n-(L+1)d/2}}{\mathcal{W}_{\alpha,k}^{n-Ld/2}}$$

几点说明:

1. 任一 sector 上 $N-1$ 维积分。 $\alpha = 0, \cdots, N,\ k = 0, \cdots, n_\alpha$

2. $\mathcal{U}_{\alpha,k}$, $\mathcal{W}_{\alpha,k}$ 分别为 $\mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{W}_\alpha$ 因子化 t_{β_k} 后的结果。

3. Δ_k 源自变换的雅克比因子及被积函数的因子化。

4. 将上述分解过程在各 subsector 上循环往复进行，直至因子化过程停止，即：$\mathcal{I} = \emptyset$

最终得到积分如下形式:

$$I = \int_0^1 \prod_{\alpha=1}^{N-1} dt_\alpha t_\alpha^{a_\alpha - b_\alpha \epsilon} g(t, \epsilon)$$

其中，函数 $g(t,\epsilon)$ 解析，且在 $t=0$ 处非 0。

四、泰勒展开 $g(t,\epsilon)$ 分离出极点 order t_α： $t_1,\cdots,t_{N-1}$

$$g(t,\epsilon)=\sum_{w=0}^{w_0} t_1^{\omega} g_{\bar{1}}^{(w)}(t,\epsilon)+t_1^{w_1} g^{(w_1)}(t,\epsilon) \qquad (a_1\leq -1)$$

$$w_0=[|a_1|]-1, \qquad w_1>w_0, \qquad g^{(w_1)}(t,\epsilon)\Big|_{t_1=0}\neq 0$$

$$I=\sum_{w=0}^{w_0}\frac{1}{a_1+w+1-b_1\epsilon}\int_0^1\prod_{\alpha=2}^{N-1} dt_\alpha t_\alpha^{a_\alpha-b_\alpha\epsilon} g_{\bar{1}}^{(w)}(t,\epsilon)$$
$$+\int_0^1 dt_1 t_1^{a_1+w_1-b_1\epsilon}\prod_{\alpha=2}^{N-1} dt_\alpha t_\alpha^{a_\alpha-b_\alpha\epsilon} g^{(w_1)}(t,\epsilon)$$

迭代进行下去，直至完成对 t_{N-1} 的泰勒展开。

除了 $g_{\bar{1}}^{(0)}(t,\epsilon)$，其余的 g 函数在 $t\to 0$ 时可能为 0。特别地，

$$g_{\bar{1}}^{(0)}(t,\epsilon)=g(t,\epsilon)\Big|_{t_1=0},\qquad g^{(1)}(t,\epsilon)=\frac{g(t,\epsilon)-g(t,\epsilon)\Big|_{t_1=0}}{t_1}$$

一个简单例子：

$$I=\int_0^1 dt_1dt_2t_1^{-1-\epsilon}t_2^{-\epsilon}\frac{1}{t_1+(1-t_1)t_2}\qquad \mathcal{I}=\{t_1,t_2\}$$

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^1 dt_1d(t_1t_2)t_1^{-1-\epsilon}(t_1t_2)^{-\epsilon}\frac{1}{t_1+(1-t_1)t_1t_2}\\&=\int_0^1 dt_1dt_2t_1^{-1-2\epsilon}t_2^{-\epsilon}\frac{1}{1+(1-t_1)t_2}\\&=-\frac{1}{2\epsilon}\int_0^1 dt_2t_2^{-\epsilon}\frac{1}{1+t_2}+\int_0^1 dt_1dt_2t_1^{-2\epsilon}t_2^{1-\epsilon}\frac{1}{(1+t_2)(1+(1-t_1)t_2)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 d(t_1 t_2) dt_2 (t_1 t_2)^{-1-\epsilon} t_2^{-\epsilon} \frac{1}{t_1 t_2 + (1 - t_1 t_2) t_2} \\
&= \int_0^1 dt_1 dt_2 t_1^{-1-\epsilon} t_2^{-1-2\epsilon} \frac{1}{1 + (1 - t_2) t_1} \\
&= \frac{1}{2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^1 dt_1 t_1^{-\epsilon} \frac{1}{1 + t_1} + \int_0^1 dt_1 dt_2 t_1^{-\epsilon} t_2^{-2\epsilon} \frac{1}{(1 + t_1)(1 + (1 - t_2) t_1)}
\end{aligned}
$$

$$
I = I_1 + I_2
$$

结果中出现的所有积分都是收敛的，可以对 ϵ 作展开，并对积分数值计算。