Review on X Y Z states in QCD sum rules
(对QCD求和规则研究 X Y Z 粒子的评述)

王志刚

华北电力大学物理系

保定 071003

zgwang@aliyun.com

报告提纲

- 引言
- QCD求和规则在四夸克态中的应用
- QCD求和规则在分子态中的应用
- QCD求和规则在强子桀偶素态中的应用
- QCD求和规则在混杂态和六夸克态中的应用
- QCD求和规则中参数的选取
- 总结

1 引言

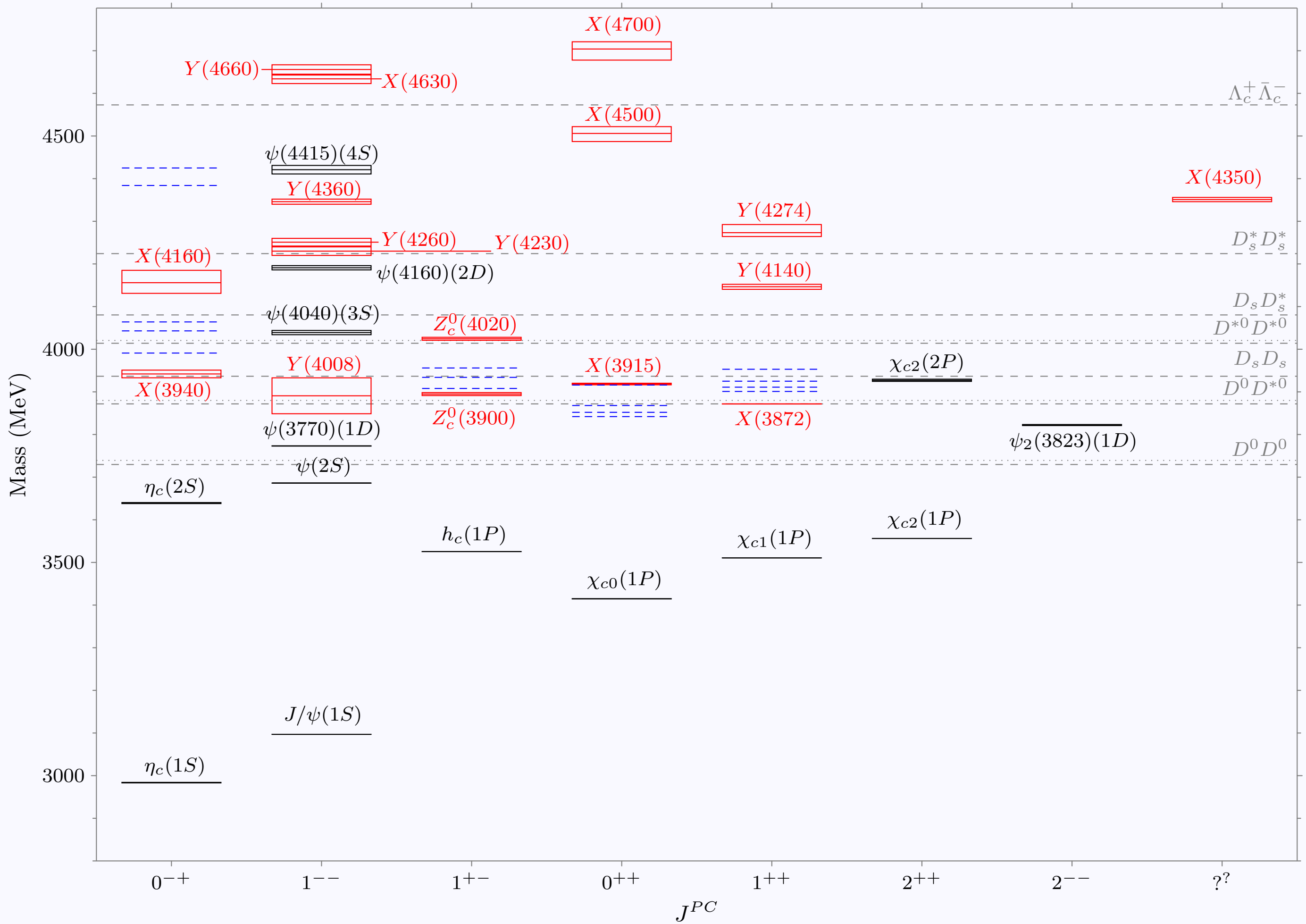
自2003年，Belle合作组在$B \to XK$，$X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-$衰变中发现$X(3872)$以来，世界各大合作组陆续发现了许多类粲介子。这些介子的性质不是简单的$q\bar{q}$夸克模型所能容纳，也没有那一个模型能够完美地解释它们的产生、衰变、质量、结构等。粗略地说，对现有的类粲介子大概有五种解释：

1. Tetraquark state
2. Molecular state
3. Threshold effect , Rescattering effect , Cusp effect
4. Hybrid state
5. Hadro charmonium .

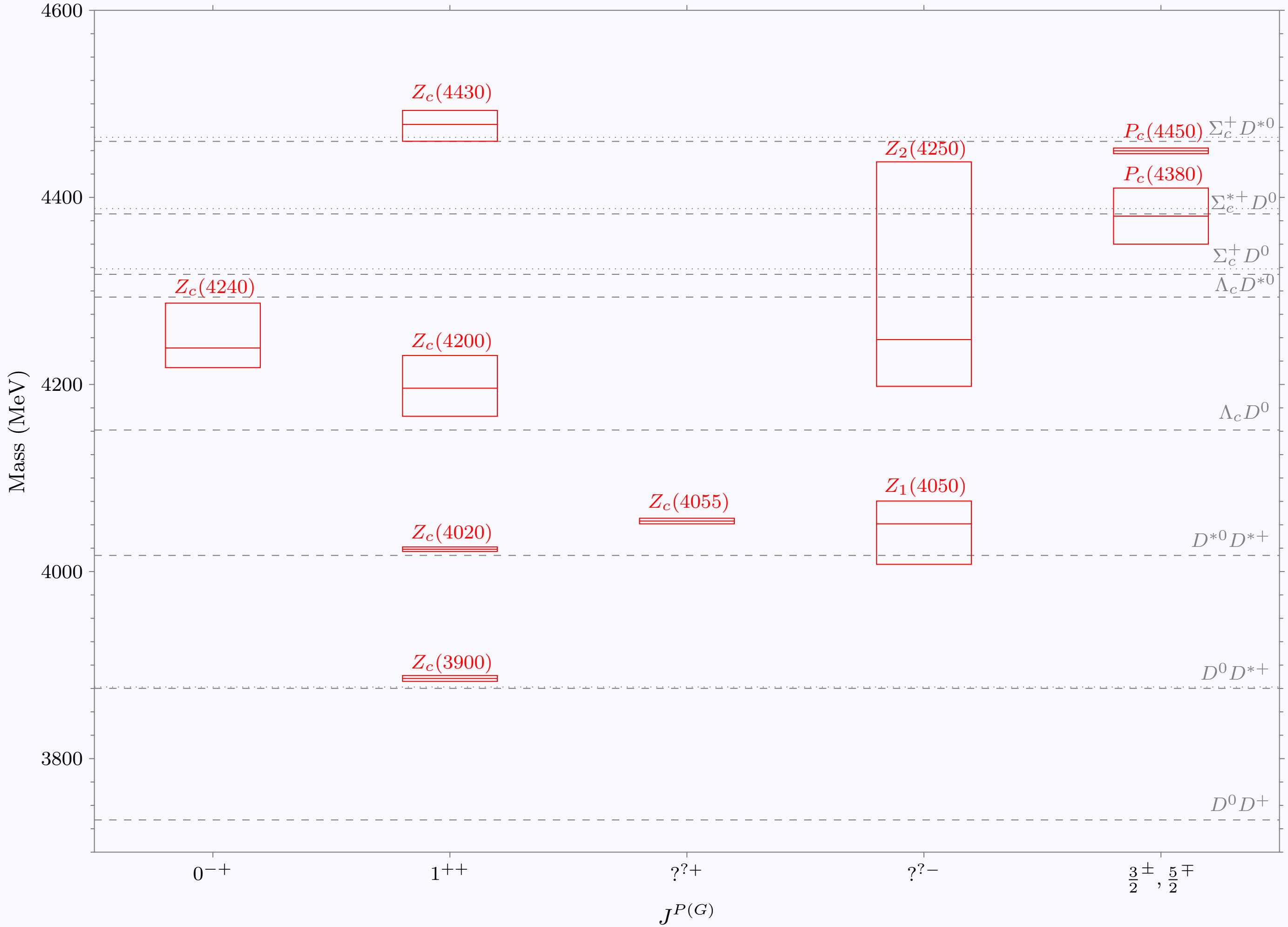
具体而详细的内容见最近的综述：

Hua-Xing Chen, Wei Chen, Xiang Liu, Shi-Lin Zhu, Phys. Rept. 639 (2016) 1-121 ;
R. F. Lebed, R. E. Mitchell, E. S. Swanson, arXiv:1610.04528[hep-ph]。

- **2003**
  - $X(3872)$ observed at Belle
- **2004**
  - $X(3872)$ confirmed at D0, CDF
- **2005**
  - $X(3915)$ [as $Y(3940)$] observed at Belle
  - $Y(4260)$ observed at BaBar
- **2006**
  - $\chi_{c2}(2P)$ [as $Z(3930)$] observed at Belle
  - $Y(4260)$ confirmed at CLEO-c
- **2007**
  - $X(3940)$, $Y(4008)$, $Y(4660)$ observed at Belle
  - $Y(4360)$ observed at BaBar
  - $Y(4360)$ confirmed at Belle
- **2008**
  - $X(3915)$ [as $Y(3940)$] confirmed at BaBar
  - $X(3940)$ confirmed at Belle
  - $Z^{\pm}(4050)$, $X(4160)$, $Z^{\pm}(4250)$, $Z^{\pm}(4430)$, $X(4630)$ observed at Belle
- **2009**
  - $Y(4140)$ observed at CDF
- **2010**
  - $X(3915)$, $X(4350)$, $Y_b(10888)$ observed at Belle
  - $\chi_{c2}(2P)$ [as $Z(3930)$] confirmed at BaBar
- **2011**
  - $Y(4274)$ observed at CDF
- **2012**
  - $X(3915)$ confirmed at BaBar
  - $Z_b(10610)^{\pm}$ observed and confirmed at Belle
  - $Z_b(10650)^{\pm}$ observed and confirmed at Belle
- **2013**
  - $X(3823)$ [likely $\psi_2(1D)$], $Z_b(10610)^0$ observed and confirmed at Belle
  - $Z_c(3900)^{\pm}$, $Z_c(4020)^{\pm}$ observed at BESIII
  - $Z_c(3900)^{\pm}$ confirmed at Belle
  - $Z_c(3900)^0$ observed at CLEO-c
- **2014**
  - $Z_c(4020)^0$ observed at BESIII
  - $Y(4140)$ confirmed at D0, CMS
  - $Y(4274)$ confirmed at CMS
  - $Y(4660)$ confirmed at BaBar
  - $Z_c(4020)^{\pm}$ confirmed at BESIII
  - $Z^{\pm}(4200)$ observed at Belle
  - $Z^{\pm}(4240)$ observed at LHCb
  - $Z^{\pm}(4430)$ confirmed at LHCb
- **2015**
  - $X(3823)$ [likely $\psi_2(2D)$], $Z_c(3900)^0$, $Z_c(4020)^0$ confirmed at BESIII
  - $Z_c(4055)^{\pm}$ observed at Belle
  - $Y(4230)$ observed at BESIII
  - $P_c^+(4380)$, $P_c^+(4450)$ observed at LHCb
- **2016**
  - $Y_b(10888)$ no longer observed at Belle
  - $X(5568)^{\pm}$ observed at D0
  - $X(5568)^{\pm}$ NOT observed at LHCb
  - $Y(4140)$, $Y(4274)$ confirmed at LHCb
  - $X(4500)$, $X(4700)$ observed at LHCb



中性粲偶素和类粲介子的 J^{PC} 和质量。中性的XYZ粒子，不排除是传统的粲偶素，或者粲偶素-多夸克态的混合态。



荷电类粲介子的 J^{PG} 和质量。荷电的 XYZ 粒子，基本可以排除是传统的粲偶素。

2 QCD求和规则在四夸克态中的应用

最早两篇文章

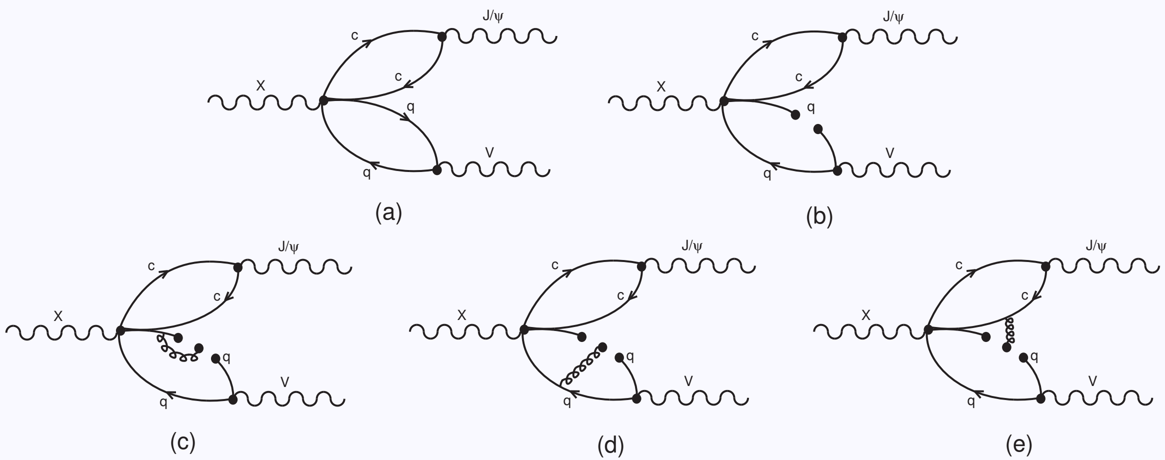
F. S. Navarra, M. Nielsen, Phys. Lett. B639 (2006) 272;
R. D. Matheus, S. Narison, M. Nielsen, J. M. Richard, Phys. Rev. D75 (2007) 014005。

把 $X(3872)$ 看作 $J^{PC}=1^{++}$ 的四夸克态，用 $J_\mu(x)$ 来研究它的质量和衰变，$X(3872)\to J/\psi\pi^+\pi^-$, $J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$,

$$J_\mu(x) \;=\; \frac{\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}}{\sqrt{2}}\left\{q^j(x)C\gamma_5c^k(x)\bar{q}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^n(x)+q^j(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{q}^m(x)\gamma_5C\bar{c}^n(x)\right\}\;, \tag{1}$$

这个流可以很好地再现 $X(3872)$ 的质量，但计算它的宽度的时候，遇到了很大的困难。

计算衰变 $X(3872) \to J/\psi V \to J/\psi\pi^+\pi^-$, $J/\psi\pi^+\pi^-\pi^0$, 如果同时考虑连接图和不连接图的贡献，所得宽度远远大于实验值；如果只考虑连接图贡献(e)，所得宽度和实验值差不多。



(a) (b) (c) (d) (e)

此外，在文献 J. M. Dias, F. S. Navarra, M. Nielsen, C. M. Zanetti, Phys. Rev. D88 (2013) 016004，只考虑连接图贡献，得到 $Z_c(3900)$ 的宽度，和实验值符合。在文献 Z. G. Wang, T. Huang, Nucl. Phys. A930 (2014) 63 中，只考虑连接图贡献，得到 $Z_b(10610)$ 的宽度，和实验值符合。

但是，在文献 W. Chen, T. G. Steele, H. X. Chen, S. L. Zhu, Eur. Phys. J. C75 (2015) 358；Z. G. Wang, Int. J. Mod. Phys. **A30** (2015) 1550168 中，计算 $Z_c(4200)$ 的宽度，同时考虑连接图和不连接图的贡献，可以再现宽度的实验值。要不要考虑不连接图的贡献？目前尚无定论。此外，应用QCD求和规则计算衰变宽度的文献相对很少。

举一个特例

用流 $J_X(x)$ 来研究衰变 $X(5568) \to B_s^0\pi^+$,

$$\Pi(p,q) = i^2 \int d^4x d^4y e^{ip\cdot x} e^{iq\cdot y} \langle 0|T\left\{J_{B_s}(x)J_\pi(y)J_X(0)\right\}|0\rangle \, , \qquad (2)$$

where the currents

$$\begin{aligned} J_{B_s}(x) &= \bar{s}(x)i\gamma_5 b(x) \, , \\ J_\pi(y) &= \bar{u}(y)i\gamma_5 d(y) \, , \\ J_X(0) &= \epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}u^j(0)C\gamma_5 s^k(0)\bar{d}^m(0)\gamma_5 C\bar{b}^n(0) \, , \end{aligned} \qquad (3)$$

interpolate the mesons B_s, π and $X(5568)$, respectively。

只考虑连接图贡献(J. M. Dias et al, Phys. Lett. B758 (2016) 235), 或者同时考虑连接图和不连接图的贡献(Z. G. Wang, Eur. Phys. J. C76 (2016) 279), 都能给出宽度的实验值。

在文献 Phys. Lett. B758 (2016) 235 中, 取了 $q^2 \to 0$ 的极限。我认为算符乘积展开需要 $q^2 \to -\infty$, 取零极限有问题。我认为应该同时考虑连接图和不连接图的贡献 (纯属个人观点, 不一定正确)。

利用QCD求和规则，研究四夸克态，单从重现质量的实验值来说，成功的描述大概如下(这里 $[Qq]_S$, $[Qq]_P$, $[Qq]_V$, $[Qq]_A$ 是色反三重态标量、赝标、矢量、轴矢量双夸克态，$Q=c,b$)：

$$
\begin{aligned}
X(3872) &= \frac{1}{2}\left([cu]_A[\overline{cu}]_S+[cd]_A[\overline{cd}]_S+[cu]_S[\overline{cu}]_A+[cd]_S[\overline{cd}]_A\right) \ \ (\text{with}\ \ J^{PC}=1^{++})\,,\\
Z_c(3900/3885) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left([cu]_A[\overline{cd}]_S-[cu]_S[\overline{cd}]_A\right) \ \ (\text{with}\ \ 1^{+-})\ ?\ \surd\,,\\
Z_c(4200) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left([cu]_A[\overline{cd}]_S-[cu]_S[\overline{cd}]_A\right) \ \ (\text{with}\ \ 1^{+-})\ ?\,,\\
Z(4430) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left([cu]_A[\overline{cd}]_S-[cu]_S[\overline{cd}]_A\right) \ \ (2\text{S}) \ \ (\text{with}\ \ 1^{+-})\,,\\
Y(3915) &= [cs]_A[\overline{cs}]_A \ \text{or}\ [cs]_S[\overline{cs}]_S \ \ (\text{with}\ \ 0^{++})\,,\\
X(4500) &= [cs]_A[\overline{cs}]_A \ \ (2\text{S}) \ \ (\text{with}\ \ 0^{++})\,,\\
Z_c(4020/4025) &= [cu]_A[\overline{cd}]_A \ \ (\text{with}\ \ 1^{+-}\ \ \text{or}\ \ 2^{++})\,,\\
Y(4140) &= [cs]_A[\overline{cs}]_A \ \ (\text{with}\ \ 2^{++})\,,\\
Y(4660/4630) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left([cs]_A[\overline{cs}]_P-[cs]_P[\overline{cs}]_A\right) \ \text{or}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left([cs]_V[\overline{cs}]_S+[cs]_S[\overline{cs}]_V\right) \ \ (\text{with}\ \ 1^{--})\,,
\end{aligned}
$$

注：参数选取不同，导致了同一个流，可以出不同的四夸克态质量，$Z_c(3900/3885)$ 是轴矢四夸克态的基态？或者 $Z_c(4200)$ 是轴矢四夸克态的基态？存在争议。我的观点是把 $Z_c(3900)$ 和 $Z(4430)$ 分别看作轴矢四夸克态的基态和第一激发态，QCD求和规则可以再现其质量(纯属个人观点，不一定正确)。

$$
\begin{aligned}
X(4700) &= [cs]_V[\overline{cs}]_V \;\; (\text{with } \; 0^{++})\,, \\
X(5568) &= [us]_A[\overline{db}]_A \;\text{ or }\; [us]_S[\overline{db}]_S \;\; (\text{with } \; 0^{++})\,, \\
Z_b(10610) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left([bu]_A[\overline{bd}]_S - [bu]_S[\overline{bd}]_A\right) \;\; (\text{with } \; 1^{+-})\,, \\
Z_b(10650) &= [bu]_A[\overline{bd}]_A \;\; (\text{with } \; 1^{+-})\,,
\end{aligned} \tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(4660) &= [cs]_S[\overline{cs}]_S \;\; (\text{P} - \text{wave}) \;\; (\text{with } \; 1^{--})\,, \\
Y_b(10890) &= [bq]_S[\overline{bq}]_S \;\; (\text{P} - \text{wave}) \;\; (\text{with } \; 1^{--})\,, \\
X(4500) &= [cs]_A[\overline{cs}]_A \;\; (\text{D} - \text{wave}) \;\; (\text{with } \; 0^{++})\,, \\
X(4700) &= [cs]_A[\overline{cs}]_A \;\; (\text{D} - \text{wave}) \;\; (\text{with } \; 0^{++})\,.
\end{aligned} \tag{5}
$$

这是基于四夸克态对现有X、Y、Z质量的成功描述，包括国内外许多人的工作。此外，许多基于QCD求和规则的理论预言，等待未来实验的检验，我没有列出。

这里给出的都是用色反三重态双夸克构造的四夸克态。用色六重态双夸克构造四夸克流，见陈华星、陈伟和朱世琳的文章。

3 QCD求和规则在分子态中的应用

利用QCD求和规则，研究分子态，单从重现质量的实验值来说，成功的描述大概如下：

$$
\begin{aligned}
X(3872) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(D\overline{D}^{*} - D^{*}\overline{D}\right) \quad (\text{with } J^{PC}=1^{++}),\\
Z_c(3900/3885) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(D\overline{D}^{*} + D^{*}\overline{D}\right) \quad (\text{with } 1^{+-}) \ ? \ ,\\
Z_c(4200) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(D\overline{D}^{*} + D^{*}\overline{D}\right) \quad (\text{with } 1^{+-}) \ ? \ ,\\
Z_c(4020/4025) &= D^{*}\overline{D}^{*} \quad (\text{with } 1^{+-} \text{ or } 2^{++}),\\
Y(4140) &= D_s^{*}\overline{D}_s^{*} \quad (\text{with } 0^{++}) \ \text{LHCb data} \ \times \ ,\\
Z(4250) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(D\overline{D}_1 + D_1\overline{D}\right) \quad (\text{with } 1^{-+}) \ ? \ \text{depend on OPE},\\
Y(4360) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(D\overline{D}_1 - D_1\overline{D}\right) \quad (\text{with } 1^{--}),
\end{aligned}
$$

注：参数选取不同，导致了同一个流，可以出不同的分子态质量，$Z_c(3900/3885)$是轴矢分子态的基态？或者$Z_c(4200)$是轴矢分子态的基态？存在争议。

$$
\begin{aligned}
Z_c(4430) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(D^*\overline{D}_1 + D_1\overline{D}^*\right) \ \ (\text{with } \ 0^{--}) \ \text{LHCb data} \ \times\,, \\
Z_b(10610) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(B\overline{B}^* + B^*\overline{B}\right) \ \ (\text{with } \ 1^{+-})\,, \\
Z_b(10650) &= B^*\overline{B}^* \ \ (\text{with } \ 1^{+-})\,.
\end{aligned} \tag{6}
$$

这是基于分子态对现有X、Y、Z质量的成功描述，包括国内外许多人的工作。

此外，许多基于QCD求和规则的理论预言，等待未来实验的检验，我没有列出。

这方面工作，国防科技大学的张建荣和黄明球应该做的最多。

4 QCD求和规则在强子粲偶素中的应用

利用QCD求和规则，研究强子粲偶素，单从重现质量的实验值来说，成功的描述大概如下：

$$Y(4660) = \psi' f_0(980) \ (\text{with} \ J^{PC} = 1^{--}) \, . \tag{7}$$

5 QCD求和规则在混杂态和六夸克态中的应用

这方面文献比较少，并且还没有实验数据支持理论预言，比较详细的介绍可见综述 Hua-Xing Chen, Wei Chen, Xiang Liu, Shi-Lin Zhu, Phys. Rept. 639 (2016) 1-121。

总之，对于QCD求和规则来说，最成功的计算，还是对四夸克态质量的计算，能够解释的新粒子也最多。其次是对分子态质量的计算，也能解释不少新粒子。需要强调的是：如果不引入混合，把$Y(4260)$看作矢量四夸克态，无论怎样调整参数，都出不了质量的实验值。见参考文献 Z. G. Wang, Eur. Phys. J. **C76** (2016) 387。

6 QCD求和规则中参数的选取

The correlation functions $\Pi(p)$ for the hidden-charm (and hidden-bottom) tetraquark states at the quark level can be written as

$$\begin{aligned}\Pi(p) &= \sum_n C_n(p^2,\mu)\langle\mathcal{O}_n(\mu)\rangle = \int_{4m_Q^2(\mu)}^{\infty} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2} \\ &= \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2} + \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2}\, ,\end{aligned} \tag{8}$$

where the $C_n(p^2,\mu)$ are the Wilson's coefficients, the $\langle\mathcal{O}_n(\mu)\rangle$ are the vacuum condensates of dimension n, the $\rho_{QCD}(s,\mu)$ are the QCD spectral densities, the μ is the energy scale, $\mu \gg \Lambda_{QCD}$, the $m_Q(\mu)$ are heavy quark masses, and the s_0 are continuum threshold parameters.
The ground state contributions are

$$\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2}\, . \tag{9}$$

The correlation functions $\Pi(p)$ do not depend on the energy scale μ, that is

$$\frac{d}{d\mu}\Pi(p) \;=\; 0\,, \tag{10}$$

but we can not warrant

$$\frac{d}{d\mu}\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds\frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2} \rightarrow 0\,, \tag{11}$$

due to the following two reasons inherited from the QCD sum rules:

- 微扰修正项被略去，高维真空凝聚因子化为低维真空凝聚，高维真空凝聚的能标依赖性被修正了；
- 引入截断 s_0，阈值 $4m_Q^2(\mu)$ 和连续态阈值 s_0 之间的关联是未知的，强子-夸克对偶只是一个假设。

我们得不到不依赖于能标的QCD求和规则，但我们有一个经验的能标公式，可以协调地把QCD谱密度的能标定下来。

We perform the Borel transformation with respect to the variable $P^2 = -p^2$ and obtain

$$\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2} \rightarrow \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{T^2} \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right) . \quad (12)$$

Now the QCD sum rules have two typical energy scales μ^2 and T^2, where the T^2 is the Borel parameter. The integrals in Eq.(12) are sensitive to the heavy quark masses m_Q.

重夸克质量的变化，可以引起积分区间 $\underbrace{4m_Q^2(\mu) - s_0}$ 和QCD谱密度 $\underbrace{\rho_{QCD}(s,\mu)}$ 的变化，这也就引起布莱尔窗口的变化，并由此产生的强子质量和极点留数的变化。具体的计算表明：微小的重夸克质量 m_Q 变化，可以起比较大强子质量变化。

从上面的分析，我们可以得出结论：能标的选取很重要，对结果影响很大。

从最早两篇文章 F. S. Navarra, M. Nielsen，Phys. Lett. B639 (2006) 272；R. D. Matheus, S. Narison, M. Nielsen, J. M. Richard，Phys. Rev. D75 (2007) 014005 起，参数的选取如下：

- 用最小减除粲夸克质量 $m_c(m_c)$，把 $m_c(m_c)$ 看作一个参数，具体数值在不同的文章中有差异，一般来说，大概取 $\underbrace{m_c(m_c) = 1.23 \pm 0.05\,\mathrm{GeV}}$，小于 Particle Data Group 中的质量 $\underbrace{m_c(m_c) = 1.275 \pm 0.025\,\mathrm{GeV}}$；轻夸克质量和真空凝聚的能标取在 $\mu = 1\,\mathrm{GeV}$。做QCD求和规则的人，除了我和我的合作者外，基本采取这种参数方案。

- 用最小减除粲夸克质量 $m_c(\mu = 1\,\mathrm{GeV})$，轻夸克质量和真空凝聚的能标也取在 $\mu = 1\,\mathrm{GeV}$。我和我的合作者，在2013年以前采取这个参数方案。这个参数方案，得到的强子质量偏大。

- 我们首先研究QCD求和规则中所选取的能标对强子质量的影响，即不取 $m_Q(\mu) = m_Q(m_Q)$。见文献 Z. G. Wang, T. Huang, Phys. Rev. D89 (2014) 054019；Z. G. Wang, Eur. Phys. J. C74 (2014) 2874。

为了研究QCD求和规则对于能标的依赖性，我们首先对算符乘积展开做统一而协调的要求。

在算符乘积展开的时候，我们把真空凝聚计算到维度 $n = 10$，并且把高维真空凝聚因子化为低维真空凝聚，在因子化的时候，假设了真空满足这个条件。

我们对算符乘积展开做协调的截断，取 $n \le 10$ 和 $k \le 1$。真空凝聚是算符的真空期望值，算符量级为 $\mathcal{O}(\alpha_s^k)$，我们取 $k \le 1$，略去 $k > 1$ 的部分。

现在我们研究四夸克系统$Q\bar{Q}q'\bar{q}$ 的QCD求和规则对能标的依赖性。我们首先推导出QCD求和规则。

在强子方面，我们提取出基态对关联函数 $\Pi(p)$ 的贡献，

$$\Pi(p) = \frac{\lambda^2_{X/Y/Z}}{M^2_{X/Y/Z} - p^2} + \cdots \,, \tag{13}$$

这里 $\lambda_{X/Y/Z}$ 是极点留数或者说流-强子的耦合常数。

We take quark-hadron duality below the continuum thresholds s_0, perform the Borel transformation with respect to the variable $P^2 = -p^2$, and obtain the QCD sum rules,

$$\lambda^2_{X/Y/Z} \exp\left(-\frac{M^2_{X/Y/Z}}{T^2}\right) = \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \rho_{QCD}(s,\mu) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right) \tag{14}$$

We differentiate above QCD sum rules with respect to $\frac{1}{T^2}$, then eliminate the pole residues $\lambda_{X/Y/Z}$, and obtain the QCD sum rules for the masses,

$$M^2_{X/Y/Z} = -\frac{\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{d}{d(1/T^2)} \rho_{QCD}(s,\mu) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)}{\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \rho_{QCD}(s,\mu) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)} . \quad (15)$$

Then it is easy to obtain the pole residues,

$$\lambda^2_{X/Y/Z} = \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds\, \rho_{QCD}(s,\mu) \exp\left(-\frac{s - M^2_{X/Y/Z}}{T^2}\right) . \quad (16)$$

下面讨论如何确定QCD谱密度的能标。

我们采用双势阱模型来描述四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 。在四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 中，重夸克 Q 作为一个静态的势阱，吸引轻夸克 q 形成色反三重态的重双夸克态 $\mathcal{D}^i_{qQ}$，

$$q + Q \;\to\; \mathcal{D}^i_{qQ}\,, \tag{17}$$

或者吸引轻反夸克 $\bar{q}'$ 形成色单态的介子或者色八重态的类介子态，

$$\bar{q}' + Q \;\to\; \bar{q}'Q\;(\bar{q}'\lambda^a Q)\,. \tag{18}$$

重反夸克 $\bar{Q}$ 作为另外一个静态势阱，吸引轻反夸克 $\bar{q}'$ 形成色三重态的反重双夸克态 $\mathcal{D}^i_{\bar{q}'\bar{Q}}$，

$$\bar{q}' + \bar{Q} \;\to\; \mathcal{D}^i_{\bar{q}'\bar{Q}}\,, \tag{19}$$

或者吸引轻夸克 q，形成色单态的介子或者色八重态的类介子态，

$$q + \bar{Q} \;\to\; \bar{Q}q\;(\bar{Q}\lambda^a q)\,, \tag{20}$$

where the i is color index, the λ^a is Gell-Mann matrix.

Then

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i_{qQ}+\mathcal{D}^i_{\bar{q}'\bar{Q}} &\rightarrow \text{compact tetraquark states}\,,\\
\bar{q}'Q+\bar{Q}q &\rightarrow \text{loose molecular states}\,,\\
\bar{q}'\lambda^a Q+\bar{Q}\lambda^a q &\rightarrow \text{molecule}-\text{like states}\,,
\end{aligned} \tag{21}$$

the two heavy quarks Q and $\bar{Q}$ stabilize the four-quark systems $q\bar{q}'Q\bar{Q}$.

这也就导致了隐粲和隐美四夸克态的QCD求和规则，可以同时满足极点为主和算符乘积展开收敛。

The heavy four-quark systems are characterized by the effective heavy quark masses $\mathbb{M}_Q$ (or constituent quark masses) and the virtuality $V=\sqrt{M^2_{X/Y/Z}-(2\mathbb{M}_Q)^2}$ (or bound energy not as robust), where the $X/Y/Z$ denote the four-quark systems $q\bar{q}'Q\bar{Q}$.

四夸克态$Q\bar{Q}q'\bar{q}$的QCD求和规则有三个特征能标：μ^2，T^2，V^2.

我们很自然地取

$$\mu^2 = V^2 = M^2_{X/Y/Z} - (2\mathbb{M}_Q)^2 = \mathcal{O}(T^2)\,. \quad (22)$$

我们首次研究了四夸克态 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 的QCD求和规则的能标依赖性，发现能标公式Eq.(22)适用于所有四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$。

我们把所有夸克质量和真空凝聚演化到这个特定的能标μ，然后提取强子质量$M_{X/Y/Z}$和极点留数。或者说μ和$M_{X/Y/Z}$满足一个特定的关系，参数$\mathbb{M}_Q$是一定的，对所有过程适用。

The vacuum condensates are taken to be the $\underbrace{\text{standard values}}$ $\langle\bar{q}q\rangle = -(0.24 \pm 0.01\,\mathrm{GeV})^3$, $\langle\bar{s}s\rangle = (0.8 \pm 0.1)\langle\bar{q}q\rangle$, $\langle\bar{q}g_s\sigma Gq\rangle = m_0^2\langle\bar{q}q\rangle$, $\langle\bar{s}g_s\sigma Gs\rangle = m_0^2\langle\bar{s}s\rangle$, $m_0^2 = (0.8 \pm 0.1)\,\mathrm{GeV}^2$, $\langle\frac{\alpha_s GG}{\pi}\rangle = (0.33\,\mathrm{GeV})^4$ at the energy scale $\mu = 1\,\mathrm{GeV}$.

The quark condensates and mixed quark condensates evolve with the renormalization group equation, $\langle\bar{q}q\rangle(\mu) = \langle\bar{q}q\rangle(Q)\left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{4}{9}}$, $\langle\bar{s}s\rangle(\mu) = \langle\bar{s}s\rangle(Q)\left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{4}{9}}$, $\langle\bar{q}g_s\sigma Gq\rangle(\mu) = \langle\bar{q}g_s\sigma Gq\rangle(Q)\left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{2}{27}}$, and $\langle\bar{s}g_s\sigma Gs\rangle(\mu) = \langle\bar{s}g_s\sigma Gs\rangle(Q)\left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{2}{27}}$.

We take the $\overline{MS}$ masses $\underbrace{m_c(m_c) = (1.275 \pm 0.025)\,\mathrm{GeV}}$, $\underbrace{m_b(m_b) = (4.18 \pm 0.03)\,\mathrm{GeV}}$ and $\underbrace{m_s(\mu = 2\,\mathrm{GeV}) = (0.095 \pm 0.005)\,\mathrm{GeV}}$ from the Particle Data Group, and take into account the energy-scale dependence of the $\overline{MS}$ masses from the renormalization group equation,

$$
\begin{aligned}
m_c(\mu) &= m_c(m_c)\left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m_c)}\right]^{\frac{12}{25}}, \\
m_b(\mu) &= m_b(m_b)\left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m_c)}\right]^{\frac{12}{23}}, \\
m_s(\mu) &= m_s(2\mathrm{GeV})\left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(2\mathrm{GeV})}\right]^{\frac{4}{9}}, \\
\alpha_s(\mu) &= \frac{1}{b_0 t}\left[1 - \frac{b_1}{b_0^2}\frac{\log t}{t} + \frac{b_1^2(\log^2 t - \log t - 1) + b_0 b_2}{b_0^4 t^2}\right]. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

简单小结：We use the energy scale formula

$$\mu = \sqrt{M^2_{X/Y/Z/P} - (2\mathbb{M}_Q)^2} \tag{24}$$

to determine the optimal energy scales of the hidden-charm (and hidden-bottom) tetraquark states in QCD sum rules。我们把所有夸克质量和真空凝聚演化到这个特定的能标 μ，然后提取强子质量和极点留数。下面举例说明这个能标公式物理价值。

如果我们用流 $J_\mu(x)$ 研究 $Z_c(3900)$，那么最佳的能标是 $\mu = 1.4\,\mathrm{GeV}$，

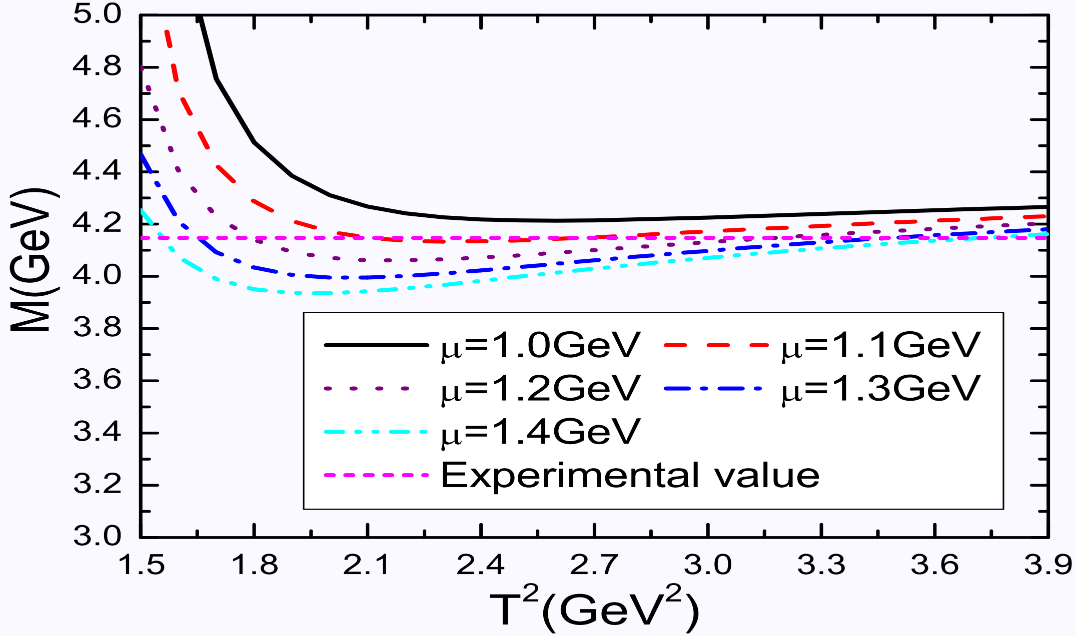
$$J_\mu(x) = \frac{\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}}{\sqrt{2}}\left\{u^j(x)C\gamma_5 c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^n(x) - u^j(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_5 C\bar{c}^n(x)\right\} \tag{25}$$

QCD求和规则可以再现 $Z_c(3900)$ 的质量。

如果我们用流 $\eta_\mu(x)$ 研究 $Y(4140)$，那么最佳的能标是 $\mu = 2.0\,\mathrm{GeV}$，

$$\eta_\mu(x) = \frac{\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}}{\sqrt{2}}\left\{s^j(x)C\gamma_5 c^k(x)\bar{s}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^n(x) + s^j(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{s}^m(x)\gamma_5 C\bar{c}^n(x)\right\} \tag{26}$$

QCD求和规则不能再现 $Y(4140)$ 的质量，而能再现质量的能标是 $\mu = 1.1\,\mathrm{GeV}$。我们可以得出结论，把 $Z_c(3900)$ 和 $Y(4140)$ 同时看做轴矢四夸克态是有问题的。



$Y(4140)$的质量随能标的变化情况。

7 总结

- 利用QCD求和规则计算四夸克态、分子态、强子桀偶素的质量，还是比较成功的，但计算它们的衰变的时候，究竟只考虑连接图的贡献，还是考虑连接图加不连接图的贡献，存在争议。还需要大量的工作。

- QCD求和规则并不能给出所有X、Y、Z粒子的质量，比如：$Y(4260)$无论作为四夸克态还是分子态，QCD求和规则都无法给出它的质量。

- QCD求和规则对四夸克态、分子态、强子桀偶素、混杂态的质量预言，还需要未来的实验检验。

- QCD谱密度的能标对强子质量的提取有重要影响，是一个值得进一步探讨的话题。比如：如果采取能标公式，可以把$Z_c(3900)$和$Z(4430)$分别看作轴矢四夸克态的基态和第一激发态，用QCD求和规则成功给出其质量；可以把$Y(3915)$和$X(4500)$分别看作标量四夸克态的基态和第一激发态，用QCD求和规则成功给出其质量。

谢谢大家，欢迎批评指正！