

# Revisiting the radiative decays $J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)}$ and $\eta - \eta'$ mixing

何俊康

华中师范大学 粒子物理研究所

2018.10.28

# 内容提要

- 1 动机
- 2 方法与计算
- 3 数值分析
- 4 结论

## 动机: $\eta - \eta'$ mixing

利用 *BABAR*[2006'; 2011'] 和 *CLEO*[1998'; 2009'] 实验组给出的类时和类空  $\gamma^* \gamma \eta^{(\prime)}$  跃迁形状因子,  $\eta - \eta'$  系统的混合角被限定:

$$\phi = 37.7 \pm 0.7^\circ \quad \text{Fu-Guang Cao, Phys. Rev. D } \mathbf{85}, 057501 (2012). \quad (s=1.5\text{-}9\text{GeV}^2, s=4\text{-}40\text{GeV}^2)$$

$$\phi = 33.5 \pm 0.9^\circ \quad \text{R. Escribano, P. Masjuan, and P. Sanchez-Puertas, Phys. Rev. D } \mathbf{89}, 034014 (2014). \quad (\text{PAs})$$

$$\phi = 33 \pm 4^\circ \quad \text{R. Escribano, P. Masjuan, and P. Sanchez-Puertas, Eur. Phys. J. C } \mathbf{75}, 414 (2015). \quad (s=112\text{GeV}^2)$$

后面两个值由 *BABAR*( $s=112\text{GeV}^2$ ) 形状因子的测量值所抽取.

由低能  $VP\gamma$  辐射衰变过程所限定的混合角 ( $F_P(0,0) = \frac{f_V}{m_V} g_{VP\gamma} + \dots$ ):

$$\phi = 39.6 \pm 0.4^\circ, \quad \text{R. Escribano and J.-M. Frère, JHEP } \mathbf{06}, 029 (2005).$$

可以看出由 *BABAR*( $s=112\text{GeV}^2$ ) 形状因子所抽取的混合角的值比通常其他过程的拟合值小得多. 这就是所谓的 “*BABAR puzzle*”.

R. Escribano, P. Masjuan, and P. Sanchez-Puertas, Eur. Phys. J. C **75**, 414 (2015).

$R_{J/\psi}$  关于混合角  $\phi$  有一个非常简单的依赖关系 (FKS).

来自  $R_{J/\psi}$  的限定:

$$\phi = 39.3 \pm 1.0^\circ \quad \text{Th. Feldmann, P. Kroll, and B. Stech, Phys. Rev. D } \mathbf{58}, 114006 (1998).$$

*BABAR puzzle*? ..... 或者 .....  $R_{J/\psi}$ ?

# $R_{J/\psi}$ : QCD axial anomaly

$J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)}$ 过程由非微扰矩阵元 $\langle 0|G\tilde{G}|\eta^{(\prime)}\rangle$ (QCD axial anomaly)占主导: V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys, B **165**, 55(1980).

$$R_{J/\psi} = \frac{\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta)}{\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')} = \left( \frac{1 - \frac{m_\eta^2}{M_{J/\psi}^2}}{1 - \frac{m_{\eta'}^2}{M_{J/\psi}^2}} \right)^3 \left| \frac{\langle 0|G\tilde{G}|\eta\rangle}{\langle 0|G\tilde{G}|\eta'\rangle} \right|^2.$$

在FKS方案中, 非微扰矩阵元 $\langle 0|G\tilde{G}|\eta^{(\prime)}\rangle$ 可以被唯象地表示成

$$\langle 0|\frac{\alpha_s}{4\pi}G\tilde{G}|\eta\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}m_\eta^2 f_q \cos \phi, \quad \langle 0|\frac{\alpha_s}{4\pi}G\tilde{G}|\eta'\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}m_{\eta'}^2 f_q \sin \phi$$

可得

hq趋于零

$$R_{J/\psi} = \frac{\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta)}{\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')} = \left( \frac{1 - \frac{m_\eta^2}{M_{J/\psi}^2}}{1 - \frac{m_{\eta'}^2}{M_{J/\psi}^2}} \right)^3 \frac{m_\eta^4}{m_{\eta'}^4} \cot^2 \phi.$$

利用 $R_{J/\psi}$ 的实验值, 可以限定混合角 $\phi = 39.3 \pm 1.0^\circ$ .

..... Dominated by QCD axial anomaly? .....近些年文献中的讨论

$$J/\psi \rightarrow \gamma \eta^{(\prime)}$$

## Dominated by QCD axial anomaly:

V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys, B **165**, 55(1980).

Kuang-Ta Chao, Phys, Rev, D **39**, 1353 (1989).

QCDRC

Kuang-Ta Chao, Nucl. Phys, B **335**, 101(1990).

Yu-Ping Kuang, Yu-Ping Yi and Bing Fu, Phys, Rev, D **42**, 2300 (1990).

## Vector meson dominate:

Q. Zhao, Phys. Lett. B **697**, 52 (2011).

J.M. Gérard and A. Martini, Phys. Lett. B **730**, 264 (2014).

## Perturbative QCD: gluon content( $O(\alpha_s^2)$ ):

J.P. Ma, Phys. Rev. D **65**, 097506 (2002).

B.A. Li, Phys. Rev. D **77**, 097502 (2008).

## Perturbative QCD: quark content( $O(\alpha_s^4)$ ):

J.G. Körner, J.H. Kühn, M. Kramer and H. Schneider, Nucl. Phys. B **229** 115(1983).

Ya-Dong Yang, arXiv:hep-ph/0404018v1.

Gang Li, Tong Li, Xue-Qian Li, Wen-Gan Ma and Shu-Min Zhao, Nucl. Phys. B **727**, 301 (2005).

Ying-Jia Gao, Yu-Jie Zhang and Kuang-Ta Chao, Chin. Phys. Lett. **23**, 2376 (2006).

Shu-Min Zhao, Xue-Xia Pang, Li-Quan Liu and Yong-Hui Li, Commun. Theor. Phys. **51**, 1101 (2009).

# Dominated by QCD axial anomaly VS Perturbative QCD

按照光锥上的twist展开, 定域两胶子矩阵元 $\langle 0|G\tilde{G}|\eta^{(\prime)}\rangle$ 的最低阶贡献来自twist-4, CZ指出QCD axial anomaly占主导的原因为:

V.L. Chernyak, and A.R. Zhitnitsky, Phys. Rep. **112**, 173 (1984).

1. Gluon content有贡献的 $O(\alpha_s^2)$ 阶, 领头阶twist的贡献为零.
2. Quark content有贡献的 $O(\alpha_s^4)$ 阶, 领头阶twist所贡献的圈图过程在数值上被强烈压低.

事实上, 尽管胶子成分领头阶twist的贡献被压低, (J.P. Ma (2002)) 但是夸克成分的单圈贡献并没有被压低. (Ya-Dong Yang(2004))

接下来, 我们在微扰QCD框架下, 分别计算来自胶子成分和夸克成分的贡献, 并与实验上所测量的 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)}$ 的分支比作了比较.

J.G. Körner, J.H. Kühn, M. Kramer and H. Schneider, Nucl. Phys. B **229** 115(1983).

当然, 我们的目标是 $R_{J/\psi}$ !

# 内容提要

- 1 动机
- 2 方法与计算
- 3 数值分析
- 4 结论

## $\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)})$ : Helicity振幅

$J/\psi \rightarrow \eta^{(\prime)}\gamma$ 的衰变振幅可以表示为:

$$M_t = E^\mu \varepsilon^{*\nu} T_{\mu\nu}$$

其中 $E^\mu, \varepsilon^{*\nu}$ 是 $J/\psi$ 和光子的极化矢量.

跟据洛伦兹不变性,规范不变性以及宇称守恒,

$$T_{\mu\nu} \sim \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho p^\sigma$$

其中 $k, p$ 是光子和 $\eta^{(\prime)}$ 的四动量. 利用投影算符

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2P \cdot k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k^\rho P^\sigma$$

定义Helicity振幅

$$H = T_{\mu\nu}^{PS} \mathcal{P}^{\mu\nu}$$



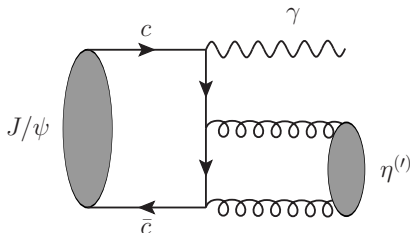


Figure: Leading order gluonic contributions for  $J/\psi \rightarrow \gamma \eta'$

“Bilocal” 两胶子 *twist* - 2 强子矩阵元:

$$\langle \eta'(\rho) | A_\alpha^a(x) A_\beta^b(y) | 0 \rangle = \frac{1}{4} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \frac{k^\rho p^\sigma}{p \cdot k} \frac{C_F}{\sqrt{3}} \frac{\delta^{ab}}{8} f_{\eta'}^1 \int du e^{i(up \cdot x + \bar{u}p \cdot y)} \frac{\phi^g(u)}{u(1-u)} + \dots$$

## Gluon contents

In the weak binding approximation ( $m_c = \frac{M}{2}$ ):

$$H_{QCD}^g = \frac{2Q_c}{9} \sqrt{4\pi\alpha} (4\pi\alpha_s) \frac{R_\psi(0) f_{\eta^{(\prime)}}^1}{\sqrt{\pi M} M} H_g$$

其中

$$f_{\eta^{(\prime)}}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (f_{\eta^{(\prime)}}^u + f_{\eta^{(\prime)}}^d + f_{\eta^{(\prime)}}^s),$$

$$H_g = \int_0^1 du \frac{\phi_g(u)}{u(1-u)} \frac{2x(2u-1)}{1-x^2(1-2u)^2}, \quad x = \frac{m^2}{M^2}.$$

可以看到  $H_{QCD}^g \propto x$ , 即  $H_{QCD}^g$  是被  $\frac{m^2}{M^2}$  所压低的。

# Quark contents

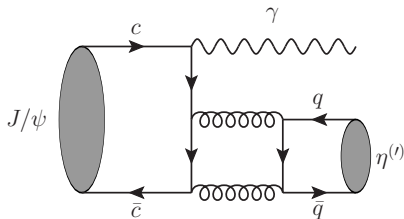


Figure: One-loop QCD Feynman diagrams for  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)}$

两夸克  $twist - 2$  强子矩阵元

$$\langle \eta^{(\prime)}(p) | \bar{q}_\alpha(x) q_\beta(y) | 0 \rangle = \frac{i}{4} f_{\eta^{(\prime)}}^q \int du e^{i(\bar{u}p \cdot y + up \cdot x)} \left( p \gamma_5 \phi_\pi(u) + \mu_{\eta^{(\prime)}} \gamma_5 \phi_p(u) + \mu_{\eta^{(\prime)}} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} P^\mu (y-x)^\nu \frac{\phi_\sigma(6)}{6} \right)_{\beta\alpha}.$$

Twist-3的贡献被 $m_q$ 压低.

## Quark contents

In the weak binding approximation:

B-S波函数

$$H_{QCD}^q = \frac{2Q_c}{9} \sqrt{4\pi\alpha}(4\pi\alpha_s)^2 \left( -i \sqrt{\frac{3}{\pi M}} \right) R_\psi(0) \sum_{q=u,d,s} \frac{f_{\eta^{(\prime)}}^q}{M} H_q$$

其中

$$H_q = \frac{2}{1-x} \int du \phi(u) [int + int(u \leftrightarrow \bar{u})], \quad x = \frac{m^2}{M^2},$$

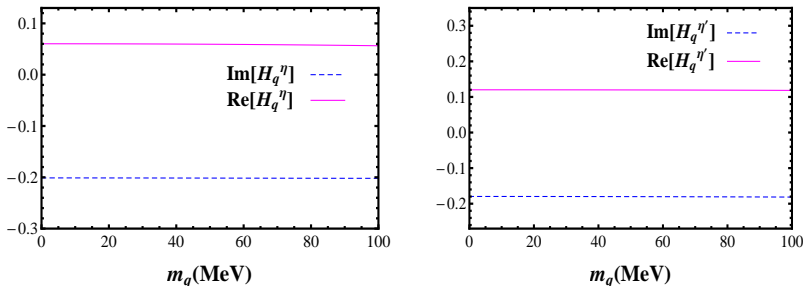
五点函数:

$$int = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{(m^2 - q^2)(k \cdot qp \cdot q - k \cdot pq^2)}{4D_1 D_2 D_3 D_4 D_5}.$$

$M$ ,  $m$ 分别是 $J/\psi$ 和 $\eta^{(\prime)}$ 的质量.

## Quark contents: $H_q$ 对 $m_q$ 的依赖

$H_q$ 关于轻夸克质量 $m_q$ 的依赖关系如图所示为:



**Figure:** The  $m_q$  dependence of real and imaginary parts of the dimensionless amplitude  $H_q^{\eta(\prime)}$

可以看出: 当 $m_q \in [0, 100]$ MeV时,  $H_q$ 几乎不依赖于 $m_q$ .

# Quark contents: $H_q$ 对 $\phi(u)$ 的依赖

$\mu_0 = 1\text{GeV}$ 时的盖根保尔矩 S.S. Agaev, V.M. Braun, N. Offen, F.A. Porkert, and A. Schäfer, Phys. Rev. D **90**, 074019 (2014).

Model	$c_2(\mu_0)$	$c_4(\mu_0)$	$c_2^g(\mu_0)$
I	0.10	0.10	-0.26
II	0.20	0.00	-0.31
III	0.25	-0.10	-0.25

$H_q$ 关于分布振幅的依赖

Model	$H_q^{\eta'}$	$H_q^{\eta}$
$\phi_I$	0.1214 - 0.1796 i	0.0616 - 0.2022 i
$\phi_{II}$	0.1224 - 0.1798 i	0.0623 - 0.2030 i
$\phi_{III}$	0.1228 - 0.1799 i	0.0625 - 0.2033 i

$H_q$ 几乎不依赖于 $\phi(u)$ 的形状.

# Quark contents: $J/\psi \rightarrow \gamma^* \rightarrow \gamma \eta^{(\prime)}$

QED processes:

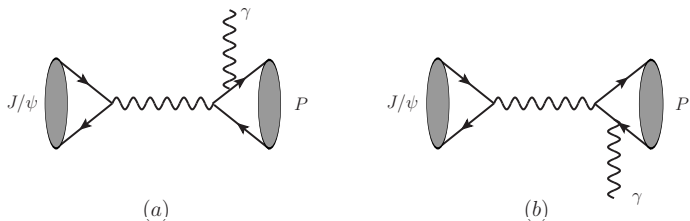


Figure: QED Feynman diagrams for  $J/\psi \rightarrow \gamma P$

$$H_{QED} = -Q_c(4\pi\alpha)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{3}{\pi M}} R_\psi(0) \frac{M^2 - m^2}{2M} F_{\gamma^* \gamma - P}(M^2)$$

其中:

$$F_{\gamma^* \gamma - P}(M^2) = \frac{\sum_{q=u,d,s} Q_q^2 f_P^q}{M^2} \int_0^2 \phi(u) \left( \frac{1}{u - u\bar{u}m^2 - \boxed{m_q^2} + i\epsilon} + (u \leftrightarrow \bar{u}) \right),$$

# 内容提要

- 1 动机
- 2 方法与计算
- 3 数值分析**
- 4 结论



输入参数:  $R_\psi(0)$ ,  $\alpha_s$ ,  $f_\eta^q$ ,  $f_\eta^s$ ,  $f_{\eta'}^q$ ,  $f_{\eta'}^s$ .

跑动耦合常数  $\alpha_s(\frac{M_{J/\psi}}{2}) = 0.34$ ,

对于  $\eta - \eta'$  系统, 我们采用FKS方案(4 $\rightarrow$ 3):

$$\begin{aligned} f_\eta^q &= \frac{f_q}{\sqrt{2}} \cos \phi & f_\eta^s &= -f_s \sin \phi \\ f_{\eta'}^q &= \frac{f_q}{\sqrt{2}} \sin \phi & f_{\eta'}^s &= f_s \cos \phi. \end{aligned}$$

其中  $q = u(d)$ . 对于  $\phi, f_q, f_s$ , 表中列出了三种不同方法拟合的结果:

Methods	$\phi^\circ$	$f_q/f_\pi$	$f_s/f_\pi$
I <sup>[1]</sup>	$37.7 \pm 0.7$	$1.08 \pm 0.04$	$1.25 \pm 0.09$
II <sup>[2]</sup>	$40.3 \pm 1.8$	$1.06 \pm 0.01$	$1.56 \pm 0.24$
III <sup>[2]</sup>	$33.5 \pm 0.9$	$1.09 \pm 0.02$	$0.96 \pm 0.04$

[1] Fu-Guang Cao, Phys. Rev. D **85**, 057501 (2012).

[2] R. Escribano, P. Masjuan, and P. Sanchez-Puertas, Phys. Rev. D **89**, 034014 (2014). (PAs).

# 数值结果: $H_{QCD}^q$

消去  $R_\psi(0)$

$$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)}) = \frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)})}{\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)} \mathcal{B}^{exp}(J/\psi \rightarrow e^+e^-)$$

其中

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-) = \frac{4\alpha^2 Q_c^2}{M^2} |R_\psi(0)|^2 \left(1 - \frac{16}{3}\alpha_s\right)$$

P.B. Mackenzie and G.P. Lepage, Phys.Rev.Lett.47(1981)1244.

利用这一比值, 可以消除波函数在零点处的不确定性所带来的影响. 仅考虑来自夸克成分的单圈QCD的贡献.

Methods	$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')$	$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta)$	$R_{J/\psi}$
I	$3.52 \times 10^{-3}$	$1.91 \times 10^{-4}$	5.4%
II	$4.43 \times 10^{-3}$	$0.17 \times 10^{-4}$	0.4%
III	$2.59 \times 10^{-3}$	$5.52 \times 10^{-4}$	21.3%
Exp	$(5.24 \pm 0.16) \times 10^{-3}$	$(11.01 \pm 0.36) \times 10^{-4}$	$(21.1 \pm 0.9)\%$

T.K. Pedlar et al. (CLEO Collaboration), Phys. Rev. D **79**, 111101 (2009).

M. Ablikim et al. (BES Collaboration), Phys. Rev. D **73**, 052008 (2006); Phys. Rev. D **83**, 012003 (2011).

# 数值结果: $H_{QCD}^q + H_{QCD}^g + H_{QED}$

考虑来自夸克成分的单圈QCD的贡献, 胶子成分树图阶的贡献, 以及电磁过程的贡献.

Methods	$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')$	$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta)$	$R_{J/\psi}$
I	$4.32 \times 10^{-3}$	$2.83 \times 10^{-4}$	6.6%
II	$5.43 \times 10^{-3}$	$0.43 \times 10^{-4}$	0.8%
III	$3.19 \times 10^{-3}$	$7.40 \times 10^{-4}$	23.2%
Exp	$(5.24 \pm 0.16) \times 10^{-3}$	$(11.01 \pm 0.36) \times 10^{-4}$	$(21.1 \pm 0.9)\%$

T.K. Pedlar et al. (CLEO Collaboration), Phys. Rev. D **79**, 111101 (2009).

M. Ablikim et al. (BES Collaboration), Phys. Rev. D **73**, 052008 (2006); Phys. Rev. D **83**, 012003 (2011).

由表中数据可以看出, 在  $J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)}$  衰变过程中来自  $\eta^{(\prime)}$  的夸克成分贡献占主导. 利用方法 III 中的  $f_q, f_s, \phi$ , 我们计算得到的分支比与实验测量值相一致, 且比值  $R_{J/\psi}$  与实验结果吻合的非常好.

如果不利用其它方法的拟合结果

参数:  $\alpha_s, f_s, f_q, \phi \rightarrow R_{J/\psi}$

$$R_{J/\psi}: \frac{f_s}{f_q}, \quad \phi$$

$$R_{J/\psi} = \frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma\eta)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')} = \frac{\mathbf{p}_\eta}{\mathbf{p}_{\eta'}} \frac{|H_\eta|^2}{|H_{\eta'}|^2} = \frac{\left(1 - \frac{m_\eta^2}{M^2}\right) |H_\eta|^2}{\left(1 - \frac{m_{\eta'}^2}{M^2}\right) |H_{\eta'}|^2}$$

其中

$$H = H_{QCD}^q + H_{QCD}^g + H_{QED}$$

定义  $\rho = \frac{F_{\eta\gamma\gamma}(0)}{F_{\eta'\gamma\gamma}(0)}$ , 可得

$$\rho = \frac{5\sqrt{2}r - 2\tan\phi}{5\sqrt{2}r\tan\phi + 2}$$

其中  $r = \frac{f_s}{f_q}$ . 利用,  $\Gamma(\eta^{(\prime)} \rightarrow \gamma\gamma)$  的实验值(KLOE-2,2013'), 可得:

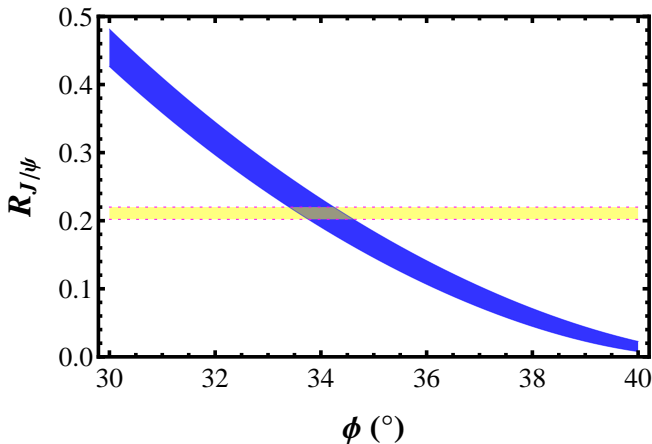
$$|F_{\eta\gamma\gamma}(0)|_{exp} = 0.274(5)\text{GeV}^{-1}, \quad |F_{\eta'\gamma\gamma}(0)|_{exp} = 0.344(6)\text{GeV}^{-1}.$$

可得  $r$  与  $\phi$  的一个解析约束:

$$r = \frac{\sqrt{2}(\tan\phi + \rho^{exp})}{5(1 - \rho^{exp}\tan\phi)}$$

$R_{J/\psi}$ :  $\phi$

将解析约束带入 $R_{J/\psi}$ , 可得 $R_{J/\psi}$ 关于混合角 $\phi$ 的依赖关系(蓝色):  
黄色带子:  $R_{J/\psi}$ 实验值.



混合角 $\phi = 34 \pm 0.6^\circ$ .

# 内容提要

- 1 动机
- 2 方法与计算
- 3 数值分析
- 4 结论

# 总结

(1). 我们解析计算了圈图积分, 发现圈图积分几乎不依赖于轻夸克质量 $m_{u,d,s}$ 和 $\eta^{(\prime)}$ 介子分布振幅的形状, 这非常有利于从 $R_{J/\psi}$ 限定混合角 $\phi$ .

(2). 数值结果表明在 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta^{(\prime)}$ 衰变过程中来自 $\eta^{(\prime)}$ 的夸克成分单圈过程的贡献占主导. 且理论计算得到的分支比与实验值相一致, 特别是两个衰变道的比值 $R_{J/\psi}$ .

(3). 利用 $\eta^{(\prime)} \rightarrow \gamma\gamma$ 过程得到的解析约束, 可以限定混合角:  
 $\phi = 34 \pm 0.6^\circ$ . 这个角度值要比通常文献中拟合的混合角(37~42)小.

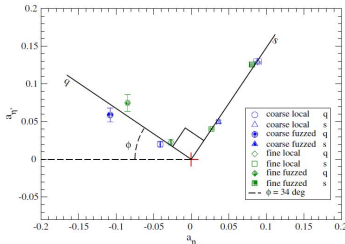
但与格点理论的预言值:

$\phi = 34 \pm 2^\circ$  Eric B. Gregory et al., Phys. Rev. D **86**, 014504(2012).

以及BABAR 112GeV<sup>2</sup>实验的拟合值:

$\phi = 33 \pm 4^\circ$  R. Escribano et al., Eur. Phys. J. C **75**, 414 (2015).

是相一致的.



---

**Thanks for your attention!**



Email: [hejk@mails.cnu.edu.cn](mailto:hejk@mails.cnu.edu.cn)