Radiative decays $h_c \to \gamma\eta^{(\prime)}$ in the framework of Bethe-Salpeter equation

樊超杰

华中师范大学

2018年10月28日

报告内容

- 研究背景
- 理论框架
- 数值分析
- 总结

研究背景

✠ 实验观测

2016年，实验组BES III，首次观测到辐射衰变 $h_c \to \gamma\eta'$（8.4σ）以及 $h_c \to \gamma\eta$ （4.0σ）的证据

$$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta') = (1.52 \pm 0.27 \pm 0.29) \times 10^{-3}$$

$$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta) = (4.7 \pm 1.5 \pm 1.4) \times 10^{-4}$$

$$\frac{\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta)}{\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta')} = (30.7 \pm 11.3 \pm 8.7)\%$$

♣ M. Ablikim et al. (BESIII Collaboration) Phys. Rev. Lett. 116, 251802 (2016).

✠ 理论研究

Branching ratios	Theory (zhu)	Experiment
$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta) \times 10^{-4}$	$1.30^{+0.44}_{-0.32}$	$4.7 \pm 1.5 \pm 1.4$
$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta') \times 10^{-3}$	$1.94^{+0.70}_{-0.51}$	$1.52 \pm 0.27 \pm 0.29$

- R.-L. Zhu and J.-P. Dai, Phys. Rev. D94, 094034 (2016). NRQCD
- Q. Wu, G. Li, and Y. Zhang, Eur. Phys. J. C77, 336 (2017). 介子圈模型

宽度： $\Gamma_{h_c} = (0.70 \pm 0.28 \pm 0.22) MeV$ PDG

背景分析

- **S-波重夸克偶素的产生或衰变：** 短程湮灭部分（微扰处理）,长程强子化过程（因子化为零点波函数）——忽略束缚态内部动量
- **P-波重夸克偶素的产生或衰变：** 类似处理却可能遭遇 红外发散

♣ R. Barbieri, R. Gatto, and E. Remiddi, Phys. Lett. 61B,465 (1976); Nucl.Phys. B162, 220 (1980). ($^3P_1$, $^1P_1$ LO)

♣ R. Barbieri, M. Caffo, R. Gatto, and E. Remiddi, Phys.Lett. 95B, 93 (1980); Nucl. Phys. B192, 61 (1981). ($^3P_0$, $^3P_2$ NLO)

♣ Zhong-Zhi Song, Ce Meng, Ying-Jia Gao, and Kuang-Ta Chao, Phys. Rev. D 69, 054009 (2004). ($B \to \chi_{cJ} K$)

......

$$\mathcal{A} = \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} Tr[\chi(q)\mathcal{O}(q)] \approx \int \frac{\mathrm{d}^3 q}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{q})\, Tr[\mathcal{P}(q)\mathcal{O}(q)]|_{q^0=0}$$

因波函数关于q很快趋于零，可对“Tr”部分进行泰勒展开

$$Tr[\mathcal{P}(0)\mathcal{O}(0)] + q^\alpha Tr[\frac{\partial \mathcal{P}(q)}{\partial q^\alpha}|_{q\to 0}\mathcal{O}(0) + \mathcal{P}(0)\frac{\partial \mathcal{O}(q)}{\partial q^\alpha}|_{q\to 0}] + \ldots$$

- **P-波重夸克偶素产生或衰变处理方案：** 考虑色八重态贡献（NRQCD）

单举过程

- ♣ G.T. Bodwin, E. Braaten, and G.P. Lepage, Phys. Rev. D 46, R1914 (1992).
- ♣ G. T. Bodwin, E. Braaten, and G. P. Lepage, Phys. Rev. D 51, 1125 (1995).

......

遍举过程

- ♣ M. Beneke and L. Vernazza, Nucl. Phys. B811, 155 (2009). $(B \to \chi_{cJ} K)$

......

考虑到P-波遍举衰变过程中色八重态的贡献计算比较复杂，这里我们借助于束缚态的Bethe-Salpeter波函数，试图给出一种新的尝试。

理论框架

✠ Bethe-Salpeter 波函数

- 忽略内部动量⇒红外发散，考虑内部动量会如何?

在瞬时协变近似下，解束缚态h_c的B-S方程得到其B-S波函数为：

$$\psi_{h_c}(\hat{q}_c) = N_{h_c}\hat{q}_c \cdot \varepsilon \left[1 + \frac{\not{P}}{m_{h_c}} + \frac{\hat{\not{q}}_c \not{P}}{m_{ce} m_{h_c}}\right] \gamma^5 f(\hat{q}_c),$$

其中 $f(\hat{q}_c)$是标量函数，

$$f(\hat{q}_c) = (\frac{2}{3})^{1/2} \frac{1}{\pi^{3/4}\beta_{h_c}^{5/2}} \mid \hat{\mathbf{q}}_c \mid e^{-\frac{\hat{\mathbf{q}}_c^2}{2\beta_{h_c}^2}},$$

这里β_{h_c}为谐振子参数。

♣ G.-L. Wang, Phys. Lett. B650, 15 (2007).

♣ S. Bhatnagar and L. Alemu, Phys. Rev. D97, 034021 (2018).

衰变振幅

- $\eta^{(\prime)}$中夸克成分贡献

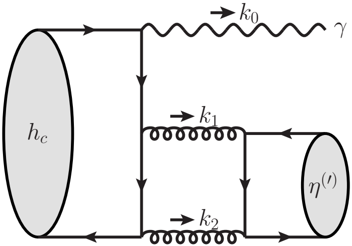


Figure: $\eta^{(\prime)}$中夸克成分贡献最低阶费曼图

$h_c \to \gamma\eta^{(\prime)}$的衰变振幅：

$$\mathcal{M}^q = \mathcal{M}^q_{\alpha\lambda}\varepsilon_0^{*\alpha}\varepsilon^\lambda = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\mathcal{M}_{(h_c\to\gamma g^*g^*)\alpha\lambda\mu\nu}\mathcal{M}^{\mu\nu}_{(g^*g^*-\eta^{(\prime)})}\frac{i}{k_1^2+i\epsilon}\frac{i}{k_2^2+i\epsilon}\varepsilon_0^{*\alpha}\varepsilon^\lambda$$

引入：$\mathcal{M}^q_{\alpha\lambda} = H^q h_{\alpha\lambda}$

这里H^q 是helicity amplitude（标量函数），$h_{\alpha\lambda}$是相应的张量结构，利用洛伦兹不变性，宇称守恒，以及规范不变性可得到具体表达：

$$h^{\alpha\lambda} = -g^{\alpha\lambda} + \frac{k_0^\alpha p^\lambda}{p\cdot k_0}$$

$$\Rightarrow H^q = \mathcal{M}^q_{\alpha\lambda}\mathcal{P}^{\alpha\lambda}$$

其中helicity投影算子$\mathcal{P}^{\alpha\lambda}$为

$$\mathcal{P}^{\alpha\lambda} = \frac{1}{2}(-g^{\alpha\lambda} + \frac{k_0^\alpha p^\lambda}{p\cdot k_0} + \frac{(k_0+p)^\alpha k_0^\lambda}{m_{h_c}^2})$$

$$\Rightarrow H^q = \frac{2f_{\eta^{(\prime)}}}{N_c\sqrt{N_c}}Q_c\sqrt{4\pi\alpha}(4\pi\alpha_s)^2\int\frac{\mathrm{d}^3\hat{q}_c}{(2\pi)^3}\int\mathrm{d}x\phi^{AS}_{\eta^{(\prime)}}(x)\left[H_0 + H_0(x\leftrightarrow\bar{x})\right]$$

其中$f_{\eta^{(\prime)}}$为有效衰变常数，H_0为无量纲函数——解析表达式。

- $\eta^{(\prime)}$中胶子成分贡献

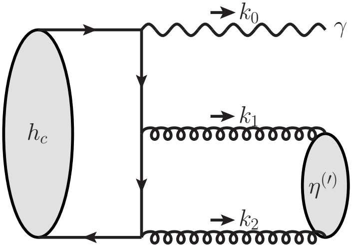


Figure: $\eta^{(\prime)}$中夸克成分贡献最低阶费曼图

胶子成分的矩阵元：

$$\langle 0 \mid A^a_\alpha(z_1)A^b_\beta(z_2) \mid \eta^{(\prime)}(p)\rangle = \frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\frac{k^\rho p^\sigma}{p\cdot k}\frac{C_F}{\sqrt{3}}\frac{\delta^{ab}}{8}f^1_{\eta^{(\prime)}}\int \mathrm{d}x e^{-i(xp\cdot z_1+(1-x)p\cdot z_2)}\frac{\phi^g(x)}{x(1-x)}$$

这里衰变常数$f^1_{\eta^{(\prime)}}$为： $f^1_{\eta^{(\prime)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(f^u_{\eta^{(\prime)}} + f^d_{\eta^{(\prime)}} + f^s_{\eta^{(\prime)}})$

衰变振幅： $\mathcal{M}^g = \mathcal{M}^g_{\alpha\lambda}\varepsilon_0^{*\alpha}\varepsilon^\lambda = H^g h_{\alpha\lambda}\varepsilon_0^{*\alpha}\varepsilon^\lambda$

这里标量函数H^g为： $H^g = Q_c\sqrt{4\pi\alpha}(4\pi\alpha_s)\frac{4}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}^3\hat{q}_c}{(2\pi)^3}\int_0^1 \mathrm{d}x H_{g0}$

注意： $H_{g0} \propto \mid \hat{\mathbf{q}}_c \mid$

而自旋结构决定了矢量到赝标量的辐射衰变中： $H_{g0(V\to\gamma p)} \propto \frac{m_P^2}{M_V^2}$

- P. Kroll and K. Passek-Kumericki, Phys. Rev. D67, 054017 (2003).
- P. Ball and G. W. Jones, JHEP 08, 025 (2007).
- S. S. Agaev, V. M. Braun, N. Offen, F. A. Porkert, and A. Schafer, Phys. Rev. D90, 074019 (2014).
- A. Ali and A. Ya. Parkhomenko, Phys. Rev. D65, 074020 (2002).

数值分析

衰变宽度

$$\Gamma(h_c \to \gamma\eta^{(\prime)}) = \frac{(1-\frac{m^2_{\eta^{(\prime)}}}{m^2_{h_c}})}{16\pi m_{h_c}}|\widetilde{\mathcal{M}}|^2,$$

其中

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{M}}|^2 =& \frac{1}{3}\sum_{\text{all polarization}} |\mathcal{M}^q + \mathcal{M}^g|^2 \\
=& \frac{1}{3}\sum_{\text{all polarization}} |(\mathcal{M}^q_{\alpha\lambda} + \mathcal{M}^g_{\alpha\lambda})\epsilon^\alpha(P)\epsilon^\lambda(k_0)|^2 \\
=& \frac{1}{3}|H^q + H^g|^2 h^{\alpha\lambda} h^{\alpha'\lambda'}\Big(-g_{\alpha\alpha'} + \frac{P_\alpha P_{\alpha'}}{m^2_{h_c}}\Big)(-g_{\lambda\lambda'}) \\
=& \frac{2}{3}|H^q + H^g|^2.
\end{aligned}$$

相关参数

Table: 夸克味道基下有关混合参数（$f_\pi = 130.2 MeV$）

Model	ϕ°	f_q/f_π	f_s/f_π
Ambrosino	40.4 ± 0.6	1.00	1.352 ± 0.007
Cao	37.66 ± 0.70	1.078 ± 0.044	1.246 ± 0.087
Escribano	33.5 ± 0.9	1.09 ± 0.02	0.96 ± 0.04

- F. Ambrosino et al., JHEP 07, 105 (2009). global fit（低能过程）
- F.-G. Cao, Phys. Rev. D85, 057501 (2012).$\eta^{(\prime)} \to \gamma\gamma, \gamma^*\gamma \to \eta^{(\prime)}$（中间能区）
- R. Escribano, P. Masjuan, and P. Sanchez-Puertas, Phys. Rev. D89, 034014 (2014); Eur. Phys. J. C75, 414 (2015).$\eta^{(\prime)} \to \gamma\gamma, \gamma^*\gamma \to \eta^{(\prime)}$（渐近极限, PAs）

Table: $\eta^{(\prime)}$中胶子成分贡献（$\Gamma_{h_c} = 0.70 \pm 0.36$ MeV）

Model	$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta)$	$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta')$	$\mathcal{R}_{h_c} = \frac{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta)}{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta')}$
Ambrosino	0.03×10^{-4}	0.23×10^{-3}	1.2%
Cao	0.13×10^{-4}	0.22×10^{-3}	5.9%
Escribano	0.38×10^{-4}	0.16×10^{-3}	23.1%
Experiment	$(4.7 \pm 1.5 \pm 1.4) \times 10^{-4}$	$(1.52 \pm 0.27 \pm 0.29) \times 10^{-3}$	$(30.7 \pm 11.3 \pm 8.7)\%$

Table: $\eta^{(\prime)}$中夸克成分贡献（$\Gamma_{h_c} = 0.70 \pm 0.36$ MeV）

Model	$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta)$	$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta')$	$\mathcal{R}_{h_c} = \frac{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta)}{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta')}$
Ambrosino	0.08×10^{-4}	0.52×10^{-3}	1.6%
Cao	0.36×10^{-4}	0.52×10^{-3}	7.0%
Escribano	1.19×10^{-4}	0.37×10^{-3}	31.8%
Experiment	$(4.7 \pm 1.5 \pm 1.4) \times 10^{-4}$	$(1.52 \pm 0.27 \pm 0.29) \times 10^{-3}$	$(30.7 \pm 11.3 \pm 8.7)\%$

我们发现胶子成分贡献并没有特别压低：$H_{g0} \propto |\hat{\mathbf{q}}_c|$

Table: 夸克成分+胶子成分的总贡献（$\Gamma_{h_c} = 0.70 \pm 0.36$ MeV）

Model	$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta)$	$\mathcal{B}(h_c \to \gamma\eta')$	$\mathcal{R}_{h_c} = \frac{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta)}{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta')}$
Ambrosino	0.20×10^{-4}	1.27×10^{-3}	1.5%
Cao	0.89×10^{-4}	1.26×10^{-3}	7.0%
Escribano	2.76×10^{-4}	0.91×10^{-3}	30.2%
Experiment	$(4.7 \pm 1.5 \pm 1.4) \times 10^{-4}$	$(1.52 \pm 0.27 \pm 0.29) \times 10^{-3}$	$(30.7 \pm 11.3 \pm 8.7)\%$

1. 夸克、胶子贡献干涉增强
2. 比值$\mathcal{R}_{h_c}$不依赖于Γ_{h_c}的不确定度
3. 比值$\mathcal{R}_{h_c}$本身的优越性就能很好地消除来自初态软贡献的不确定度

✠ 唯象讨论：$\eta-\eta'$ flavor mixing

$$\mathcal{R}_{h_c}=\frac{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta)}{\mathcal{B}(h_c\to\gamma\eta^{(\prime)})}=a\left(\frac{\sqrt{2}-r\tan\phi}{\sqrt{2}\tan\phi+r}\right)^2$$

其中

$$r=\frac{f_s}{f_q},\qquad a=\frac{m_{h_c}^2-m_\eta^2}{m_{h_c}^2-m_{\eta'}^2}\frac{\left|H_{\eta0}^q+\frac{1}{\sqrt{3}}H_{\eta0}^g\right|^2}{\left|H_{\eta'0}^q+\frac{1}{\sqrt{3}}H_{\eta'0}^g\right|^2}$$

这里的无量纲函数$H^q_{\eta^{(\prime)}0}$和$H^g_{\eta^{(\prime)}0}$有下列 关系给出：

$$f_{\eta^{(\prime)}}H^q_{\eta^{(\prime)}0}=H^q\qquad f^1_{\eta^{(\prime)}}H^g_{\eta^{(\prime)}0}=H^g$$

另外，根据$\eta^{(\prime)} \to \gamma\gamma$衰变过程得到：

$$\mid F_{\eta\gamma\gamma}(0) \mid_{exp} = 0.274(5)\, GeV^{-1},$$

$$\mid F_{\eta'\gamma\gamma}(0) \mid_{exp} = 0.344(6)\, GeV^{-1}.$$

理论计算($U_A(1)$ 反常)：

$$F_{\eta\gamma\gamma}(0) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\left(\frac{\hat{c}_q}{f_q}\cos\phi - \frac{\hat{c}_s}{f_s}\sin\phi\right),$$

$$F_{\eta'\gamma\gamma}(0) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2}\left(\frac{\hat{c}_q}{f_q}\sin\phi + \frac{\hat{c}_s}{f_s}\cos\phi\right),$$

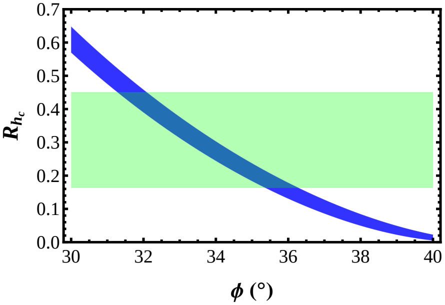
$$\text{其中，}\hat{c}_q = 5/3,\quad \hat{c}_s = \sqrt{2}/3.$$

定义：$\rho = \frac{|F_{\eta\gamma\gamma}(0)|}{|F_{\eta\gamma\gamma}(0)|}$，可有实验值$\rho_{exp} = \frac{|F_{\eta\gamma\gamma}(0)|_{exp}}{|F_{\eta\gamma\gamma}(0)|_{exp}} = \frac{0.274(5)}{0.344(6)}$给出

$$\Rightarrow r\text{与}\phi\text{解析约束：}\; r = \left.\frac{\sqrt{2}(\rho + \tan\phi)}{5(1 - \rho\tan\phi)}\right|_{\rho=\rho_{exp}}$$

- Particle Data Group Collaboration, M. Tanabashi et al., Phys. Rev. D98, 030001 (2018).
- D. Babusci et al. (KLOE-2 Collaboration), J. High Energy Phys. 01, 119 (2013).
- H. Leutwyler, Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. 64, 223 (1998).
- R. Escribano, P. Masjuan, and P. Sanchez-Puertas, Phys. Rev. D89, 034014 (2014); Eur. Phys. J. C75, 414 (2015).

将r与ϕ的解析约束关系带入$\mathcal{R}_{h_c}$的理论表达式，即得$\mathcal{R}_{h_c}$与ϕ的依赖关系（如图，蓝色带子），而$\mathcal{R}_{h_c}$的实验值由绿色带子表示$\Rightarrow$ $\phi = 33.8^\circ \pm 2.5^\circ$



- E. B. Gregory and C. McNeile, Phys. Rev. D86, 014504 (2012).
- R. Escribano, P. Masjuan, and P. Sanchez-Puertas, Phys. Rev. D89, 034014 (2014); Eur. Phys. J. C75, 414 (2015).

总结

- ✓ 通过考虑P波束缚态h_c的内部动量（引入$B-S$波函数），消除了红外发散。
- ✓ 我们发现在$h_c \to \gamma\eta^{(\prime)}$的辐射衰变过程中，$\eta^{(\prime)}$中胶子成分的贡献也很重要。
- ✓ 我们给出了非常符合实验值的$\mathcal{R}_{h_c}$，预言了$\eta-\eta'$的混合角为$\phi=33.8^\circ \pm 2.5^\circ$

Thanks for your attention!

Email: fancj@mails.ccnu.edu.cn