

应用QCD求和规则研究矢量四夸克态

王志刚

华北电力大学物理系

保定 071003

zgwang@aliyun.com

报告提纲

- 引言
- QCD求和规则在四夸克态中的应用
- QCD求和规则中参数的选取
- QCD求和规则在矢量四夸克态中的应用
- 总结和展望

1 引言

自2003年，Belle合作组在 $B \rightarrow XK$, $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$ 衰变中发现 $X(3872)$ 以来，世界各大合作组陆续发现了许多类粲介子。

粗略地说，对现有的类粲介子大概有五种解释：

1. 紧致四夸克态 ✓
2. 松散分子态 ✓
3. 阈值效应，散射效应，Cusp效应
4. 混杂态 ✓
5. 强子粲偶素 ✓ .

2 QCD求和规则在四夸克态中的应用

最早两篇文章

F. S. Navarra, M. Nielsen, Phys. Lett. B639 (2006) 272;
R. D. Matheus, S. Narison, M. Nielsen, J. M. Richard, Phys. Rev. D75 (2007) 014005。

把 $X(3872)$ 看作 $J^{PC} = 1^{++}$ 的四夸克态, 用 $J_\mu(x)$ 来研究它的质量和衰变, $X(3872) \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-$, $J/\psi \pi^+ \pi^- \pi^0$,

$$J_\mu(x) = \frac{\epsilon^{ijk} \epsilon^{imn}}{\sqrt{2}} \{ q^j(x) C \gamma_5 c^k(x) \bar{q}^m(x) \gamma_\mu C \bar{c}^n(x) + q^j(x) C \gamma_\mu c^k(x) \bar{q}^m(x) \gamma_5 C \bar{c}^n(x) \}, (1)$$

这个流可以很好地再现 $X(3872)$ 的质量, 但计算它的宽度的时候, 遇到了很大的困难。详细讨论利用QCD求和规则计算四夸克态衰变的文章, 见 Eur.Phys.J.C78(2018)14 [arXiv:1711.07215]

利用QCD求和规则，研究四夸克态，单从重现质量的实验值来说，成功的描述大概如下(这里 $[Qq]_S, [Qq]_P, [Qq]_V, [Qq]_A$ 是色反三重态标量、赝标、矢量、轴矢量双夸克态， $Q = c, b$)：

$$X^*(3860) = [cq]_S[\bar{c}\bar{q}]_S \text{ (with } 0^{++}),$$

$$X(3872) = \frac{1}{2} ([cu]_A[\bar{c}\bar{u}]_S + [cd]_A[\bar{c}\bar{d}]_S + [cu]_S[\bar{c}\bar{u}]_A + [cd]_S[\bar{c}\bar{d}]_A) \text{ (with } J^{PC} = 1^{++}),$$

$$Z_c(3900/3885) = \frac{1}{\sqrt{2}} ([cu]_A[\bar{c}\bar{d}]_S - [cu]_S[\bar{c}\bar{d}]_A) \text{ (with } 1^{+-}) \text{ ? } \checkmark,$$

$$Y(3915) = [cs]_A[\bar{c}\bar{s}]_A \text{ or } [cs]_S[\bar{c}\bar{s}]_S \text{ (with } 0^{++}),$$

$$Z_c(4020/4025) = [cu]_A[\bar{c}\bar{d}]_A \text{ (with } 1^{+-} \text{ or } 2^{++}),$$

$$Y(4140) = [cs]_A[\bar{c}\bar{s}]_A \text{ (with } 2^{++}),$$

$$Z_c(4200) = \frac{1}{\sqrt{2}} ([cu]_A[\bar{c}\bar{d}]_S - [cu]_S[\bar{c}\bar{d}]_A) \text{ (with } 1^{+-}) \text{ ?},$$

$$Y(4360/4320) = \frac{1}{\sqrt{2}} ([cq]_V[\bar{c}\bar{q}]_S + [cq]_S[\bar{c}\bar{q}]_V) \text{ (with } 1^{--}),$$

$$Z(4430) = \frac{1}{\sqrt{2}} ([cu]_A[\bar{c}\bar{d}]_S - [cu]_S[\bar{c}\bar{d}]_A) \text{ (2S) (with } 1^{+-}),$$

$$X(4500) = [cs]_A[\bar{c}\bar{s}]_A \text{ (2S) (with } 0^{++}),$$

注：参数选取不同，导致了同一个流，可以出不同的四夸克态质量， $Z_c(3900/3885)$ 是轴矢四夸克态的基态？或者 $Z_c(4200)$ 是轴矢四夸克态的基态？存在争议。我的观点是把 $Z_c(3900)$ 和 $Z(4430)$ 分别看作轴矢四夸克态的基态和第一激发态，QCD求和规则可以再现其质量。

$$\begin{aligned}
Y(4660/4630) &= \frac{1}{\sqrt{2}} ([cs]_A [\bar{cs}]_P - [cs]_P [\bar{cs}]_A) \text{ or } \frac{1}{\sqrt{2}} ([cs]_V [\bar{cs}]_S + [cs]_S [\bar{cs}]_V) \text{ (with } 1^{--}), \\
X(4700) &= [cs]_V [\bar{cs}]_V \text{ (with } 0^{++}), \\
X(5568) &= [us]_A [\bar{db}]_A \text{ or } [us]_S [\bar{db}]_S \text{ (with } 0^{++}), \\
Z_b(10610) &= \frac{1}{\sqrt{2}} ([bu]_A [\bar{bd}]_S - [bu]_S [\bar{bd}]_A) \text{ (with } 1^{+-}), \\
Z_b(10650) &= [bu]_A [\bar{bd}]_A \text{ (with } 1^{+-}),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
Y(4660) &= [cs]_S [\bar{cs}]_S \text{ (P - wave) (with } 1^{--}), \\
Y_b(10890) &= [bq]_S [\bar{b}\bar{q}]_S \text{ (P - wave) (with } 1^{--}), \\
X(4500) &= [cs]_A [\bar{cs}]_A \text{ (D - wave) (with } 0^{++}), \\
X(4700) &= [cs]_A [\bar{cs}]_A \text{ (D - wave) (with } 0^{++}).
\end{aligned} \tag{3}$$

这是基于四夸克态对现有X、Y、Z质量的成功描述，包括国内外许多人的工作。此外，许多基于QCD求和规则的理论预言，等待未来实验的检验，我没有列出。参数的选取，对从QCD求和规则提取的质量影响很大，但无论如何，直到2018年9月，把Y(4260)看做矢量四夸克态，QCD求和规则再现不了其质量。但好多模型里面，把Y(4260)看做矢量四夸克态，是很自然的解释，比如L.Maiani等人的四夸克态模型。我们经过仔细研究，协调选取参数，成功再现了Y(4260)的质量。

3 QCD求和规则中参数的选取

The correlation functions $\Pi(p)$ do not depend on the energy scale μ , that is

$$\frac{d}{d\mu}\Pi(p) = 0, \quad (4)$$

但并不能保证基态贡献不依赖能标,

$$\frac{d}{d\mu} \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s, \mu)}{s - p^2} \rightarrow 0, \quad (5)$$

due to the following two reasons inherited from the QCD sum rules:

- 微扰修正项被略去, 高维真空凝聚因子化为低维真空凝聚, 高维真空凝聚的能标依赖性被修正了;
- 引入截断 s_0 , 阈值 $4m_Q^2(\mu)$ 和连续态阈值 s_0 之间的关联是未知的, 强子-夸克对偶只是一个假设。

我们得不到不依赖于能标的QCD求和规则, 但我们有一个经验的能标公式, 可以协调地把QCD谱密度的能标定下来。

We perform the Borel transformation with respect to the variable $P^2 = -p^2$ and obtain

$$\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s, \mu)}{s - p^2} \rightarrow \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s, \mu)}{T^2} \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right). \quad (6)$$

Now the QCD sum rules have two typical energy scales $\underbrace{\mu^2 \text{ and } T^2}$, where the T^2 is the Borel parameter. The integrals in Eq.(6) are sensitive to the heavy quark masses m_Q .

重夸克质量的变化，可以引起积分区间 $\underbrace{4m_Q^2(\mu) - s_0}$ 和QCD谱密度 $\underbrace{\rho_{QCD}(s, \mu)}$ 的变化，这也就引起布莱尔窗口的变化，并由此产生强子质量和极点留数的变化。具体的计算表明：微小的重夸克质量 m_Q 变化，可以引起比较大的强子质量变化。

从上面的分析，我们可以得出结论：能标的选取很重要，对结果影响很大。

从最早两篇文章 F. S. Navarra, M. Nielsen, Phys. Lett. B639 (2006) 272; R. D. Matheus, S. Narison, M. Nielsen, J. M. Richard, Phys. Rev. D75 (2007) 014005 起, 参数的选取如下:

- 用最小减除粲夸克质量 $m_c(m_c)$, 把 $m_c(m_c)$ 看作一个参数, 具体数值在不同的文章中有差异, 一般来说, 大概取

$m_c(m_c) = 1.23 \pm 0.05 \text{ GeV}$, 小于 Particle Data Group 中的质量

$m_c(m_c) = 1.275 \pm 0.025 \text{ GeV}$; 轻夸克质量和真空凝聚的能标取在 $\mu = 1 \text{ GeV}$ 。做QCD求和规则的人, 除了我和我的合作者外, 基本采取这种参数方案。

- 用最小减除粲夸克质量 $m_c(\mu = 1 \text{ GeV})$, 轻夸克质量和真空凝聚的能标也取在 $\mu = 1 \text{ GeV}$ 。我和我的合作者, 在2013年以前采取这个参数方案。这个参数方案, 得到的强子质量偏大。

- 我们首先研究能标的选取对强子质量的影响, 即不取 $m_Q(\mu) = m_Q(m_Q)$ 。见文献 Z. G. Wang, T. Huang, Phys. Rev. D89 (2014) 054019; Z. G. Wang, Eur. Phys. J. C74 (2014) 2874。

为了研究QCD求和规则对于能标的依赖性，我们首先对算符乘积展开做统一而协调的要求。

在算符乘积展开的时候，我们把真空凝聚计算到维度 $n = 10$ ，并且把高维真空凝聚因子化为低维真空凝聚，在因子化的时候，假设了真空满足这个条件。

我们对算符乘积展开做协调的截断，取 $n \leq 10$ 和 $k \leq 1$ 。真空凝聚是算符的真空期望值，算符量级为 $\mathcal{O}(\alpha_s^k)$ ，我们取 $k \leq 1$ ，略去 $k > 1$ 的部分。

在强子方面，我们提取出基态对关联函数 $\Pi(p)$ 的贡献，得到QCD求和规则。

$$\lambda_{X/Y/Z}^2 \exp\left(-\frac{M_{X/Y/Z}^2}{T^2}\right) = \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \rho_{QCD}(s, \mu) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right). \quad (7)$$

$$M_{X/Y/Z}^2 = -\frac{\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{d}{d(1/T^2)} \rho_{QCD}(s, \mu) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)}{\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \rho_{QCD}(s, \mu) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)}. \quad (8)$$

下面讨论如何确定QCD谱密度的能标。

我们采用双势阱模型来描述四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 。在四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 中，重夸克 Q 作为一个静态的势阱，吸引轻夸克 q 形成色反三重态的重双夸克态 D_{qQ}^i ,

$$q + Q \rightarrow D_{qQ}^i, \quad (9)$$

或者吸引轻反夸克 $\bar{q}'$ 形成色单态的介子或者色八重态的类介子态,

$$\bar{q}' + Q \rightarrow \bar{q}'Q (\bar{q}'\lambda^a Q). \quad (10)$$

重反夸克 $\bar{Q}$ 作为另外一个静态势阱，吸引轻反夸克 $\bar{q}'$ 形成色三重态的反重双夸克态 $D_{\bar{q}'\bar{Q}}^i$,

$$\bar{q}' + \bar{Q} \rightarrow D_{\bar{q}'\bar{Q}}^i, \quad (11)$$

或者吸引轻夸克 q ，形成色单态的介子或者色八重态的类介子态,

$$q + \bar{Q} \rightarrow \bar{Q}q (\bar{Q}\lambda^a q), \quad (12)$$

where the i is color index, the λ^a is Gell-Mann matrix.

Then

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{qQ}^i + \mathcal{D}_{\bar{q}'\bar{Q}}^i &\rightarrow \text{compact tetraquark states,} \\ \bar{q}'Q + \bar{Q}q &\rightarrow \text{loose molecular states,} \\ \bar{q}'\lambda^a Q + \bar{Q}\lambda^a q &\rightarrow \text{molecule-like states,}\end{aligned}\tag{13}$$

the two heavy quarks Q and $\bar{Q}$ stabilize the four-quark systems $q\bar{q}'Q\bar{Q}$.

这也就导致了隐粲和隐美四夸克态的QCD求和规则，可以同时满足极点为主和算符乘积展开收敛。

The heavy four-quark systems are characterized by the effective heavy quark masses $\mathbb{M}_Q$ (or constituent quark masses) and the virtuality $V = \sqrt{M_{X/Y/Z}^2 - (2\mathbb{M}_Q)^2}$ (or bound energy not as robust), where the $X/Y/Z$ denote the four-quark systems $q\bar{q}'Q\bar{Q}$.

四夸克态 $Q\bar{Q}q'\bar{q}$ 的QCD求和规则有三个特征能标： μ^2 , T^2 , V^2 .

我们很自然地取

$$\mu^2 = V^2 = M_{X/Y/Z}^2 - (2M_Q)^2 = \mathcal{O}(T^2). \quad (14)$$

我们首次研究了四夸克态 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 的QCD求和规则的能标依赖性，发现能标公式 Eq.(14) 适用于所有四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 。(这里说的四夸克态，正反双夸克之间是S波，对于P波，要修正能标公式)

我们把所有夸克质量和真空凝聚演化到这个特定的能标 μ ，然后提取强子质量 $M_{X/Y/Z}$ 和极点留数。或者说 μ 和 $M_{X/Y/Z}$ 满足一个特定的关系，参数 M_Q 是一定的，对所有过程适用。

The vacuum condensates are taken to be the standard values $\langle \bar{q}q \rangle = -(0.24 \pm 0.01 \text{ GeV})^3$, $\langle \bar{s}s \rangle = (0.8 \pm 0.1) \langle \bar{q}q \rangle$, $\langle \bar{q}g_s \sigma G q \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle$, $\langle \bar{s}g_s \sigma G s \rangle = m_0^2 \langle \bar{s}s \rangle$, $m_0^2 = (0.8 \pm 0.1) \text{ GeV}^2$, $\langle \frac{\alpha_s GG}{\pi} \rangle = (0.33 \text{ GeV})^4$ at the energy scale $\mu = 1 \text{ GeV}$.

The quark condensates and mixed quark condensates evolve with the renormalization group equation, $\langle \bar{q}q \rangle(\mu) = \langle \bar{q}q \rangle(Q) \left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{\frac{4}{9}}$, $\langle \bar{s}s \rangle(\mu) = \langle \bar{s}s \rangle(Q) \left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{\frac{4}{9}}$, $\langle \bar{q}g_s \sigma G q \rangle(\mu) = \langle \bar{q}g_s \sigma G q \rangle(Q) \left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{\frac{2}{27}}$, and $\langle \bar{s}g_s \sigma G s \rangle(\mu) = \langle \bar{s}g_s \sigma G s \rangle(Q) \left[\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)} \right]^{\frac{2}{27}}$.

We take the $\overline{MS}$ masses $\underbrace{m_c(m_c) = (1.275 \pm 0.025) \text{ GeV}}$, $\underbrace{m_b(m_b) = (4.18 \pm 0.03) \text{ GeV}}$ and $\underbrace{m_s(\mu = 2 \text{ GeV}) = (0.095 \pm 0.005) \text{ GeV}}$ from the Particle Data Group, and take into account the energy-scale dependence of the $\overline{MS}$ masses from the renormalization group equation,

$$\begin{aligned}
 m_c(\mu) &= m_c(m_c) \left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m_c)} \right]^{\frac{12}{25}}, \\
 m_b(\mu) &= m_b(m_b) \left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m_c)} \right]^{\frac{12}{23}}, \\
 m_s(\mu) &= m_s(2\text{GeV}) \left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(2\text{GeV})} \right]^{\frac{4}{9}}, \\
 \alpha_s(\mu) &= \frac{1}{b_0 t} \left[1 - \frac{b_1 \log t}{b_0^2 t} + \frac{b_1^2 (\log^2 t - \log t - 1) + b_0 b_2}{b_0^4 t^2} \right]. \quad (15)
 \end{aligned}$$

简单小结： We use the energy scale formula

$$\mu = \sqrt{M_{X/Y/Z/P}^2 - (2M_Q)^2} \quad (16)$$

to determine the optimal energy scales of the hidden-charm (and hidden-bottom) tetraquark states and molecular states in QCD sum rules。我们把所有夸克质量和真空凝聚演化到这个特定的能标 μ ，然后提取强子质量和极点留数。下面举例说明这个能标公式物理价值。

如果我们用流 $J_\mu(x)$ 研究 $Z_c(3900)$ ，那么最佳的能标是 $\mu = 1.4 \text{ GeV}$ ，

$$J_\mu(x) = \frac{\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}}{\sqrt{2}} \{u^j(x)C\gamma_5 c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^n(x) - u^j(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_5 C\bar{c}^n(x)\} \quad (17)$$

QCD求和规则可以再现 $Z_c(3900)$ 的质量。

如果我们用流 $\eta_\mu(x)$ 研究 $Y(4140)$ ，那么最佳的能标是 $\mu = 2.0 \text{ GeV}$ ，

$$\eta_\mu(x) = \frac{\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}}{\sqrt{2}} \{s^j(x)C\gamma_5 c^k(x)\bar{s}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^n(x) + s^j(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{s}^m(x)\gamma_5 C\bar{c}^n(x)\} \quad (18)$$

QCD求和规则不能再现 $Y(4140)$ 的质量，而能再现质量的能标是 $\mu = 1.1 \text{ GeV}$ 。我们可以得出结论，把 $Z_c(3900)$ 和 $Y(4140)$ 同时看做轴矢四夸克态是有问题的。

4 QCD求和规则在矢量四夸克态中的应用

● 目前已有的关于矢量四夸克态的QCD求和规则计算

	Structures	Constituents	OPE (No)	mass(GeV)	References
$Y(4660)$	$C\gamma_5 \otimes \partial_\mu \otimes \gamma_5 C$	$c\bar{c}s\bar{s}$	6	4.69	J.R.Zhang
$Y(4660)$	$C\gamma_5 \otimes \gamma_5 \gamma_\mu C$	$c\bar{c}s\bar{s}$	8 (7)	4.65	M.Nielsen
$Y(4660)$	$C \otimes \gamma_\mu C$	$c\bar{c}s\bar{s}/c\bar{c}q\bar{q}$	10	4.70/4.66	Z.G.Wang
$Y(4660)$	$C\gamma_\mu \otimes \gamma_\nu C - C\gamma_\nu \otimes \gamma_\mu C$	$c\bar{c}q\bar{q}$	10	4.66	Z.G.Wang
$Y(4660)$	$C \otimes \gamma_\mu C$	$c\bar{c}s\bar{s}/c\bar{c}q\bar{q}$	10	4.66/4.59	Z.G.Wang
$Y(4660)$	$C\gamma_5 \otimes \gamma_5 \gamma_\mu C$	$c\bar{c}q\bar{q}$	8 (7)	4.64	W.Chen
$Y(4660)$	$C\gamma^\nu \otimes \sigma_{\mu\nu} C$	$c\bar{c}q\bar{q}$	8 (7)	4.61	W.Chen
$Y(4360)$	$C\gamma_5 \otimes \partial_\mu \otimes \gamma_5 C$	$c\bar{c}q\bar{q}$	6	4.32	J.R.Zhang
$Y(4360)$	$C\gamma_5 \otimes \gamma_5 \gamma_\mu C$	$c\bar{c}q\bar{q}$	10	4.34	Z.G.Wang
$Y(4360)$	$C \otimes \gamma_\mu C \oplus \gamma_\mu$	$c\bar{c}q\bar{q} \oplus c\bar{c}$	10	4.36	Z.G.Wang
$Y(4260)$	$C \otimes \gamma_\mu C \oplus \gamma_\mu$	$c\bar{c}q\bar{q} \oplus c\bar{c}$	10	4.26	Z.G.Wang
$Y(4260)$	$C\gamma_5 \otimes \gamma_5 \gamma_\mu C \oplus \gamma_\mu$	$c\bar{c}q\bar{q} \oplus c\bar{c}$	8 (7)	4.26	M.Nielsen

大家可以看到，不引入混合，出不了 $Y(4260)$ 的质量。我用红色把偏导数标注了一下，为了说明这个流没有确定的电荷共轭性质。

我们最近的工作：arXiv:1809.10299，成功再现 $Y(4260)$ 的质量。

我们构造矢量四夸克态流

$$\begin{aligned}
 J_{\mu}^{+}(x) &= \frac{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}}{\sqrt{2}} u^{Tj}(x) C \gamma_5 c^k(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{d}^m(x) \gamma_5 C \bar{c}^{Tn}(x), \\
 J_{\mu}^0(x) &= \frac{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}}{2} \left[u^{Tj}(x) C \gamma_5 c^k(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{u}^m(x) \gamma_5 C \bar{c}^{Tn}(x) \right. \\
 &\quad \left. + d^{Tj}(x) C \gamma_5 c^k(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{d}^m(x) \gamma_5 C \bar{c}^{Tn}(x) \right], \\
 J_{\mu}^{-}(x) &= \frac{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}}{\sqrt{2}} d^{Tj}(x) C \gamma_5 c^k(x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu} \bar{u}^m(x) \gamma_5 C \bar{c}^{Tn}(x), \quad (19)
 \end{aligned}$$

where $\overleftrightarrow{\partial}_{\mu} = \overrightarrow{\partial}_{\mu} - \overleftarrow{\partial}_{\mu}$. Under charge conjugation transform $\hat{C}$, the currents $J_{\mu}(x)$ have the property,

$$\hat{C} J_{\mu}(x) \hat{C}^{-1} = -J_{\mu}(x). \quad (20)$$

我们构造关联函数，并选取结构 $-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$ 做分析，

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}(p) &= \frac{\lambda_Y^2}{M_Y^2 - p^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \cdots, \\ &= \Pi(p^2) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \Pi_0(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2},\end{aligned}\quad (21)$$

得到求和规则：

$$\lambda_Y^2 \exp\left(-\frac{M_Y^2}{T^2}\right) = \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right), \quad (22)$$

where

$$\rho(s) = \rho_0(s) + \rho_3(s) + \rho_4(s) + \rho_5(s) + \rho_6(s) + \rho_7(s) + \rho_8(s) + \rho_{10}(s) \quad (23)$$

下面我们得到质量的表达式

$$M_Y^2 = - \frac{\int_{4m_c^2}^{s_0} ds \frac{d}{d\tau} \rho(s) \exp(-\tau s)}{\int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho(s) \exp(-\tau s)}. \quad (24)$$

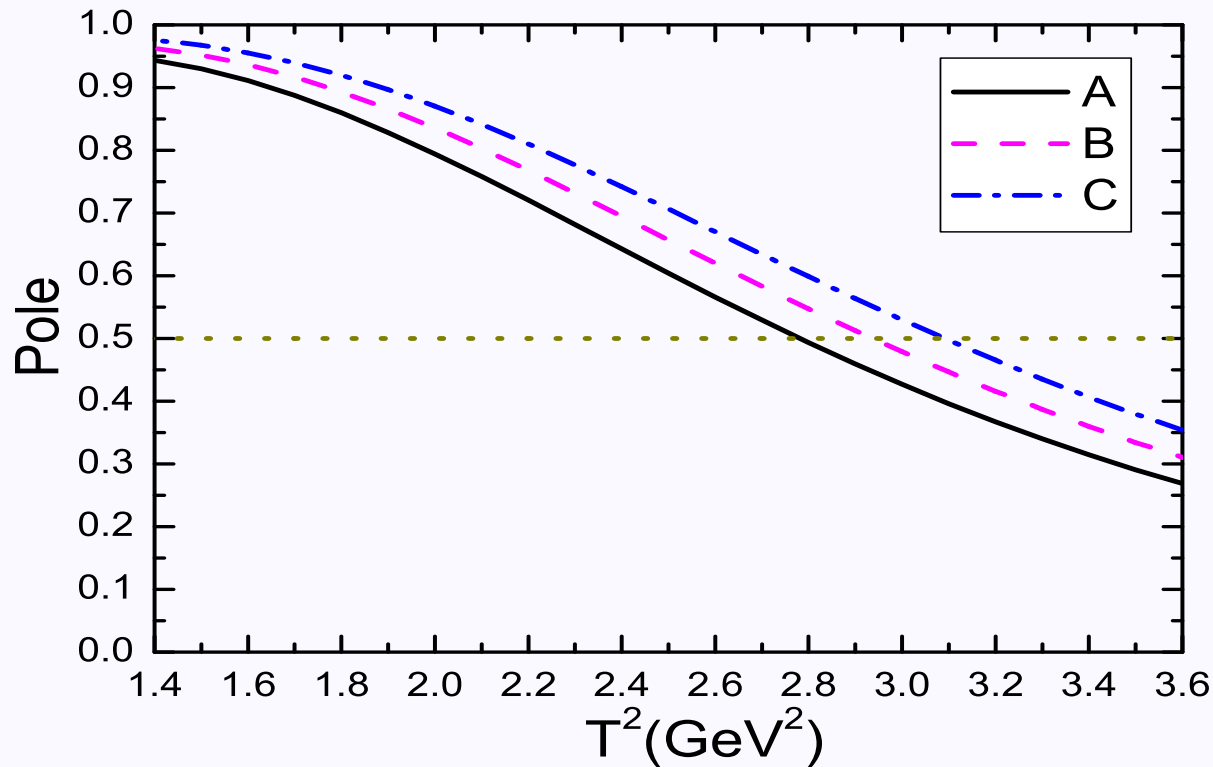
考虑到我们在两个双夸克态之间引入P波，修正能标公式，

$$\mu = \sqrt{M_Y^2 - (2M_c + 0.5 \text{ GeV})^2} = \sqrt{M_Y^2 - (4.1 \text{ GeV})^2}. \quad (25)$$

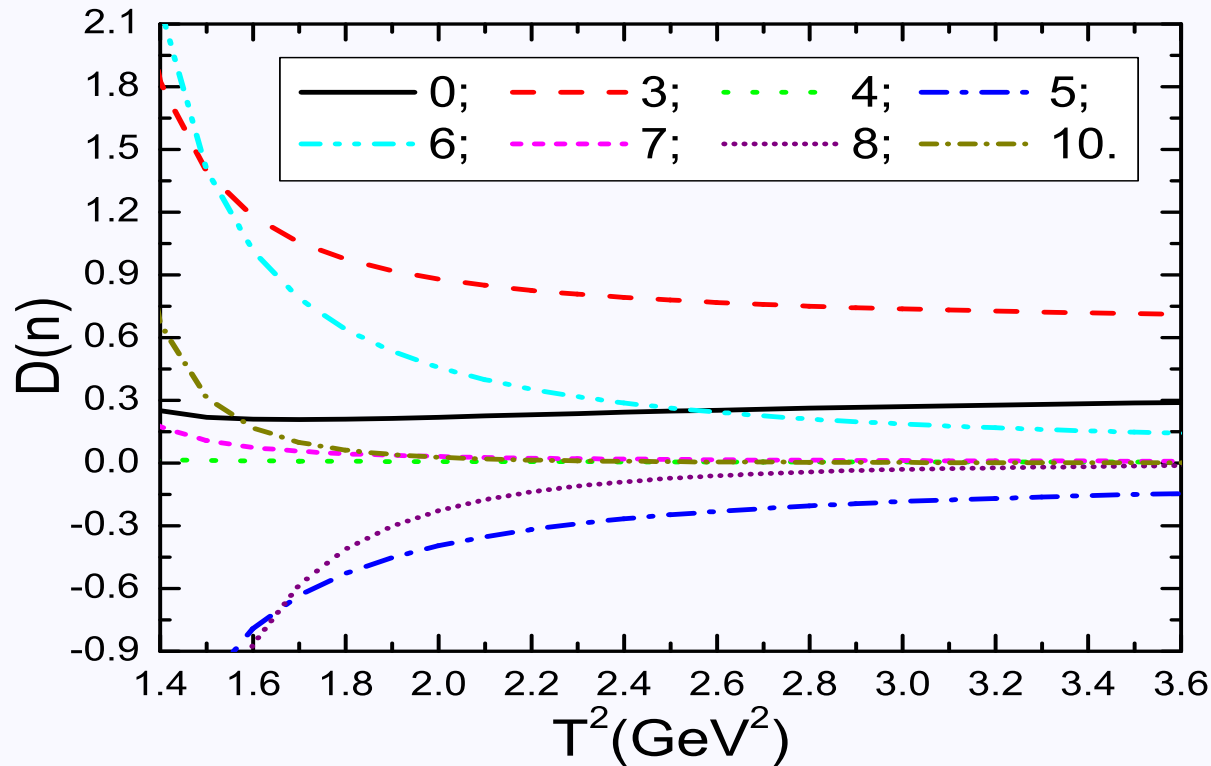
In calculations, we observe that if we take the continuum threshold parameter $\sqrt{s_0} = 4.8 \pm 0.1 \text{ GeV}$, Borel parameter $T^2 = (2.2 - 2.8) \text{ GeV}^2$, energy scale $\mu = 1.1 \text{ GeV}$, the pole contribution of the ground state vector tetraquark state $Y(4260/4220)$ is about $(49 - 81)\%$,

$$M_Y = 4.24 \pm 0.10 \text{ GeV}. \quad (26)$$

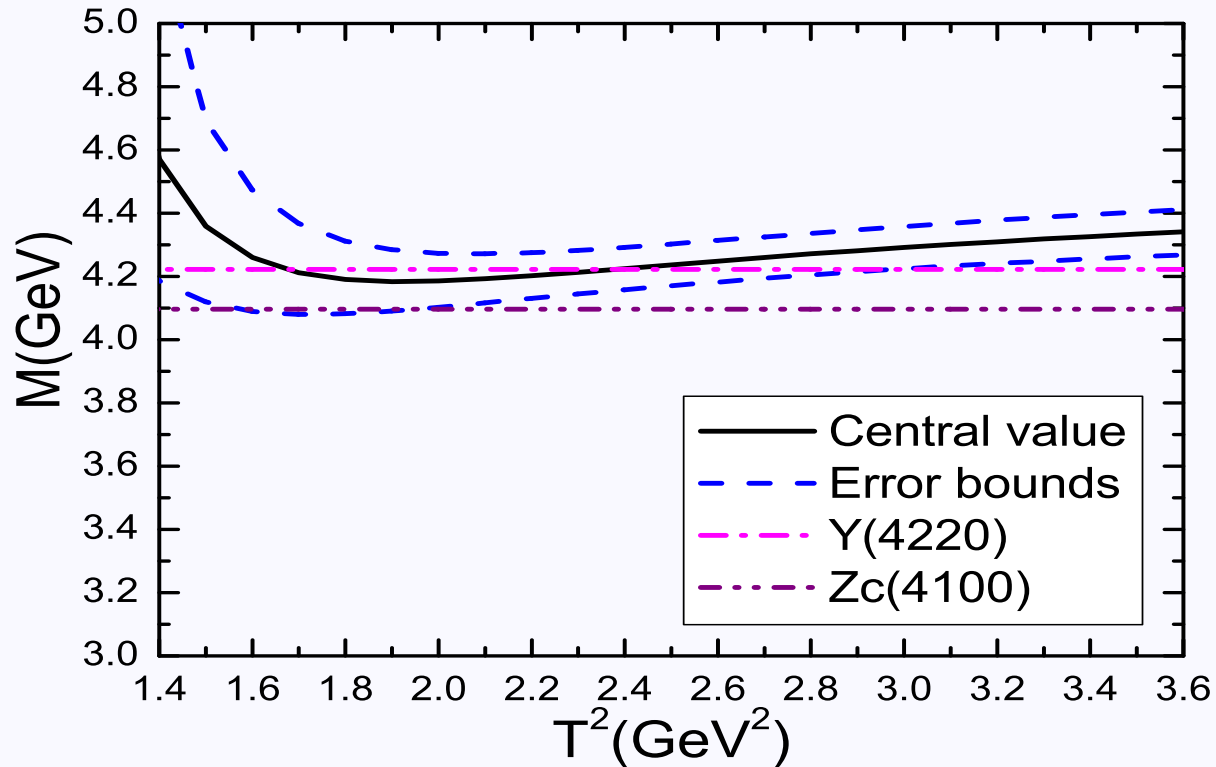
The pole contributions with variation of the Borel parameter T^2 , where the A , B and C denote the threshold parameters $\sqrt{s_0} = 4.7 \text{ GeV}$, 4.8 GeV and 4.9 GeV , respectively.



The contributions of the vacuum condensates of dimension n with variation of the Borel parameter T^2 for the threshold parameter $\sqrt{s_0} = 4.8 \text{ GeV}$.



The mass of the $Y(4260/4220)$ as vector tetraquark state with variation of the Borel parameter T^2 .



我们再次构造矢量四夸克态流

$$J_\mu(x) = \frac{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}}{\sqrt{2}} u^{Tj}(x) C \gamma_\alpha c^k(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \bar{d}^m(x) \gamma^\alpha C \bar{c}^{Tn}(x), \quad (27)$$

$$\eta_\mu(x) = \frac{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}}{2} \left[u^{Tj}(x) C \gamma_\mu c^k(x) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \bar{d}^m(x) \gamma^\nu C \bar{c}^{Tn}(x) + u^{Tj}(x) C \gamma^\nu c^k(x) \overleftrightarrow{\partial}_\nu \bar{d}^m(x) \gamma_\mu C \bar{c}^{Tn}(x) \right]. \quad (28)$$

Under charge conjugation transform $\hat{C}$, the currents $J/\eta_\mu(x)$ have the property,

$$\hat{C} J/\eta_\mu(x) \hat{C}^{-1} = -J/\eta_\mu(x). \quad (29)$$

$J_\mu(x)$ 对应的矢量四夸克态基态质量4.28GeV, $\eta_\mu(x)$ 对应的矢量四夸克态基态质量4.21GeV, 和Y(4260)或Y(4220)的质量符合很好。

5 总结和展望

- 利用QCD求和规则计算四夸克态的质量，还是比较成功的，合理地给出了许多隐粲或隐美四夸克态的质量，对于合理解释X、Y、Z粒子做出了有益探索。

- 利用QCD求和规则计算四夸克态质量，我们提出了能标公式，协调地确定QCD谱密度的能标。如果正反双夸克对处于S波，用能标公式： $\mu = \sqrt{M_Y^2 - (2M_Q)^2}$ ；如果正反双夸克对处于P波，用能标公式： $\mu = \sqrt{M_Y^2 - (2M_Q + 0.5 \text{ GeV})^2}$ ，把Y(4260/4220)看作矢量四夸克态，我们首次给出合理的质量。

- QCD谱密度的能标对强子质量的提取有重要影响，是一个值得进一步探讨的话题。

谢谢大家， 欢迎批评指正！